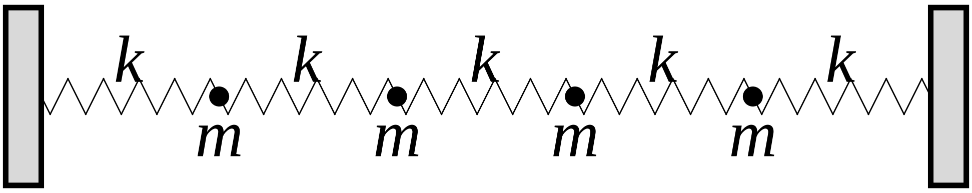
Kolokwium II

Zadanie 1.

Rozwiązanie zadania 1.

Zadanie 2.

Funkcja Lagrange'a układu o czterech stopniach swobody pokazanego na rysunku poniżej:



ma postać:

$$\mathcal{L} = T - U$$

gdzie:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2\right)$$

oraz:

$$U = \frac{1}{2}k\left[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2\right].$$

Wyznaczyć mody własne i częstości własne drgań. Podać jawnie wyrażenie opisujące rozwiązanie ogólne równań Lagrange-Eulera dla podanego układu.

Rozwiązanie zadania 2.

W pierwszym kroku szukamy położenia równowagi. Obliczamy pierwsze pochodne cząstkowe energii potencjalnej $U(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = k(2x_1 - x_2) \tag{1a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -k(x_1 - 2x_2 + x_3) \tag{1b}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3} = -k(x_2 - 2x_3 + x_4) \tag{1c}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_4} = k(2x_4 - x_3) \tag{1d}$$

Ewidentnie, położeniem równowagi są rozwiązania zerowe. Funkcje $x_i(t)$ opisują więc odchylenie od położenia równowagi. Zarówno rysunek jak i Lagrangian pokazują, że małe drgania są w tym przypadku także rozwiązaniem ogólnym równań Lagrange-Eulera.

Aby wyznaczyć macierz formy kwadratowej można policzyć drugie pochodne cząstkowe w położeniu równowagi[1], lub po prostu odczytać je z wyrażenia na U. Macierz[2] ma postać:

$$\mathcal{J} = k \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Analogicznie, macierz energii kinetycznej to:

$$\mathcal{K} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Funkcję Lagrange'a można zapisać macierzowo korzystając z $\mathcal{K}$ i $\mathcal{J}$ jako:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathcal{K} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\,\mathbf{q}^T \cdot \mathcal{J} \cdot \mathbf{q}, \tag{4}$$

gdzie:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^T = \begin{pmatrix} x_1(t), & x_2(t), & x_3(t), & x_4(t) \end{pmatrix}.$$

Rozwiązania poszukujemy w postaci:

$$x_1(t) = A_1 \exp(i\omega t), \quad x_2(t) = A_2 \exp(i\omega t), \quad x_3(t) = A_3 \exp(i\omega t), \quad x_4(t) = A_4 \exp(i\omega t), \tag{5}$$

co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \equiv \mathbf{A} e^{i\omega t}.$$

[1] W tym zadaniu pochodne te są po prostu stałymi.

[2] Jej wyznacznik wynosi $5k^4$ co jest większe od zera i pokazuje, że faktycznie mamy prawdziwe minimum w rozważanym punkcie (a nie tylko ekstremum).

Wstawienie (5) do równań Lagrange-Eulera (4) daje:

$$\left(-\omega^2\mathcal{K}+\mathcal{J}\right)\mathbf{A}e^{i\omega t}=0.$$

Rozpisując jawnie macierze $\mathcal{K}$ (3) i $\mathcal{J}$ (2) otrzymujemy układ jednorodnych równań algebraicznych:

$$\left[-m\omega^2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix}=0. \tag{6}$$

Układ równań (6) ma nietrywialne (czyli różne od zera) rozwiązania tylko jeżeli jego wyznacznik jest różny od zera. Oznaczając[3]:

$$\lambda=\frac{m\omega^2}{k} \tag{7}$$

dostajemy równanie charakterystyczne:

$$Det\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&0&0\\-1&2-\lambda&-1&0\\0&-1&2-\lambda&-1\\0&0&-1&2-\lambda\end{pmatrix}=0. \tag{8}$$

Obliczamy wyznacznik (8) rozwijając względem pierwszej kolumny:

$$Det\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&0&0\\-1&2-\lambda&-1&0\\0&-1&2-\lambda&-1\\0&0&-1&2-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(-1)^2(2-\lambda)Det\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{pmatrix}+(-1)^3(-1)Det\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda-2)^2Det\begin{pmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{pmatrix}+(2-\lambda)Det\begin{pmatrix}-1&0\\-1&2-\lambda\end{pmatrix}-Det\begin{pmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda-2)^2\left[(\lambda-2)^2-1\right]-2(\lambda-2)^2+1.$$

Otrzymaliśmy równanie charakterystyczne 4 stopnia:

$$(\lambda-2)^2\left[(\lambda-2)^2-1\right]-2(\lambda-2)^2+1=0. \tag{9}$$

[3] W praktyce po prostu wstawia się $k=1$ oraz $\omega=1$, pamiętając, że częstości własne uzyskamy w jednostkach $\omega_0=\sqrt{k/m}$.

Rozwiązanie równania (9) jest w tej postaci łatwe, ale jego postać końcowa zależy od sposobu wykonania rachunków. W postaci rozwiniętej:

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 21\lambda^2 - 20\lambda + 5 = 0$$

równanie wygląda na bardzo skomplikowane. W podobnej sytuacji należy próbować faktoryzować[4] lub innym sposobem obliczyć wyznaczniki.

W postaci (9) zadanie jest ułatwione. Przykład ten pokazuje, że wyprowadzając równanie charakterystyczne **nie należy** zbyt wcześnie wymnażać nawiasów. Podstawiamy w równaniu (9):

$$w = (\lambda - 2)^2,$$

i otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$w^2 - 3w + 1 = 0,$$

którego rozwiązanie to:

$$w = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązania r. charakterystycznego (9) to:

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}. \tag{10}$$

Rozpisując wszystkie cztery możliwe kombinacje $\pm$, i usuwając niewymierności[5], dostajemy:

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0.38 \tag{11a}$$

$$\lambda_2 = 2 - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \simeq 1.38 \tag{11b}$$

$$\lambda_3 = 2 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2.62 \tag{11c}$$

[4]Korzystając ze wskazówki, dostajemy:

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 21\lambda^2 - 20\lambda + 5 = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 5).$$

[5]Przykład: podstawiamy: $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, podnosimy obustronnie do kwadratu, otrzymujemy układ równań $a+b=6, ab=5$, czyli $a=1, b=5$.

$$\lambda_4 = 2 + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \simeq 3.62 \tag{11d}$$

Przystępujemy do obliczenia wektorów własnych. Zaczynamy od najmniejszej wartości własnej λ_1, którą wstawiamy do (6) (pamiętając o oznaczeniu (7)):

$$\begin{pmatrix} \phi & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \phi & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \phi & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

gdzie, dla elegancji wprowadzono „złoty podział”:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Musimy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} \phi A_1 - A_2 = 0 \\ -A_1 + \phi A_2 - A_3 = 0 \\ -A_2 + \phi A_3 - A_4 = 0 \\ A_3 - \phi A_4 = 0 \end{cases}$$

Podstawiając A_2 z pierwszego oraz A_4 z ostatniego równania dostajemy:

$$\begin{cases} -A_1 + \phi^2 A_1 - \phi A_4 = 0 \\ -\phi A_1 + \phi^2 A_4 - A_4 = 0 \end{cases}$$

czyli:

$$A_4 = \phi A_1 - \frac{A_1}{\phi} = A_1 \left(\phi - \frac{1}{\phi}\right) = A_1,$$

bo:

$$\phi - \frac{1}{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 1.$$

Ostatecznie, przyjmując np. $A_1 = 1$ otrzymujemy pierwszy z wektorów własnych:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi \\ \phi \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \tag{13}$$

Analogicznie wykonujemy obliczenia dla λ_2.

$$\begin{pmatrix} -1/\phi & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/\phi & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/\phi & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1/\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{14}$$

Po rozwiązaniu układu równań dostajemy wektor własny do wartości własnej λ_2:

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\phi \\ -1/\phi \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}. \tag{15}$$

Dla λ_3:

$$\begin{pmatrix} 1/\phi & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/\phi & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/\phi & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1/\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{16}$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\phi \\ -1/\phi \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{17}$$

Dla λ_4:

$$\mathbf{V}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\phi \\ \phi \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_4 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}. \tag{18}$$

Rozwiązanie ogólne to:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^{4} A_i \sin\left(\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_i\right)\mathbf{V}_i$$

w postaci jawnej:

$$\phi_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + A_3 \sin(\omega_3 t + \phi_3) + A_4 \sin(\omega_4 t + \phi_4) \tag{19a}$$

$$\phi_2(t) = A_1\phi \sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_2/\phi \sin(\omega_2 t + \phi_2) + A_3/\phi \sin(\omega_3 t + \phi_3) - A_4\phi \sin(\omega_4 t + \phi_4) \tag{19b}$$

$$\phi_3(t) = A_1\phi\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2/\phi\sin(\omega_2 t + \phi_2) - A_3/\phi\sin(\omega_3 t + \phi_3) - A_4\phi\sin(\omega_4 t + \phi_4) \tag{19c}$$

$$\phi_4(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2) - A_3\sin(\omega_3 t + \phi_3) - A_4\sin(\omega_4 t + \phi_4) \tag{19d}$$

gdzie $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{k/m}$, natomiast A_i oraz ϕ_i to dowolne stałe.

Zadanie 3.

Przekształcenie kanoniczne układu o jednym stopniu swobody dane jest funkcją tworzącą:

$$\Phi(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega\left[q - \frac{F(t)}{m\omega^2}\right]^2 \operatorname{ctg} Q. \tag{20}$$

a) wyznaczyć wzory określające przekształcenie kanoniczne $(p, q) \to (P, Q)$

b) zapisać za pomocą nowych zmiennych P, Q Hamiltonian dla oscylatora harmonicznego na który działa siła $F(t)$:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - q\,F(t).$$

c) podać równania kanoniczne Hamiltona w starych współrzędnych (p, q)

d) podać równania kanoniczne Hamiltona w nowych współrzędnych (P, Q)

Rozwiązanie zadania 3.

Przekształcenie jest kanoniczne, jeżeli nastepująca forma różniczkowa nie zmienia się:

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - H' + \frac{d\Phi}{dt}. \tag{21}$$

Podstawiając funkcję tworzącą otrzymujemy:

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - H' + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\Phi}{\partial Q}\dot{Q}, \tag{22}$$

gdzie uwzględniono, że:

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{d\Phi\left(q(t), Q(t), t\right)}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial Q}\frac{dQ}{dt}$$

oraz przyjęto standardowe oznaczenia na pochodne po czasie:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}, \qquad \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}.$$

Porównując wyrazy podobne w (22) otrzymujemy:

$$-H = -H^{'} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \quad P + \frac{\partial \Phi}{\partial Q} == 0,$$

czyli nową funkcją Hamiltona będzie

$$H^{'} = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{23}$$

a przekształcenie kanoniczne dane jest w postaci uwikłanej parą równań:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q} \end{cases} \tag{24}$$

Przystępujemy do obliczenia niezbędnych pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = m\omega \left(q - \frac{F}{m\omega^2} \right) \operatorname{ctg} Q,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Q} = -\frac{1}{2} m\omega \left[q - \frac{F(t)}{m\omega^2} \right]^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 Q),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\dot{F}}{\omega} \left[q - \frac{F(t)}{m\omega^2} \right] \operatorname{ctg} Q.$$

Wyznaczenie jawnych wzorów na przekształcenie kanoniczne sprowadza się do rozwiązania układu równań algebraicznych o niewiadomych (p, q):

$$\begin{cases} p = m\omega \left(q - \frac{F}{m\omega^2} \right) \operatorname{ctg} Q \\ P = \frac{1}{2} m\omega \left[q - \frac{F(t)}{m\omega^2} \right]^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 Q) \end{cases} \tag{25}$$

Dzielimy stronami drugie równanie w (25) przez kwadrat pierwszego, co daje:

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \tag{26a}$$

następnie wstawiamy obliczone p do pierwszego równania w (25) i otrzymujemy:

$$q = \frac{F}{m\omega^2} + \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q. \tag{26b}$$

Wzory (26a) i (26b) wyznaczają szukane przekształcenie kanoniczne i dają odpowiedź na podpunkt a).

W celu wyznaczenia nowego hamiltonianu podstawiamy wzory (26a) i (26b) do (23):

$$H^{'} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - q\,F(t) - \frac{\dot{F}}{\omega}\left[q - \frac{F(t)}{m\omega^2}\right]\operatorname{ctg} Q.$$

Większość wyrazów upraszcza się, i otrzymujemy odpowiedź do podpunktu b):

$$H^{'}(P, Q, t) = \omega P - \frac{1}{2}\frac{F(t)^2}{m\omega^2} - \frac{\dot{F}}{\omega}\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\cos Q \tag{27}$$

Aby podać równania kanoniczne Hamiltona obliczamy pochodne:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = m\omega^2\,q - F$$

i odpowiedź do podpunktu c):

$$\begin{cases} \dot{p} = -m\omega^2\,q + F(t) \\ \dot{q} = \frac{p}{m} \end{cases} \tag{28}$$

Analogicznie wykonujemy obliczenia dla nowego hamiltonianu (27):

$$\frac{\partial H^{'}}{\partial P} = \omega - \frac{\dot{F}}{\omega}\frac{cosQ}{\sqrt{2m\omega P}}, \quad \frac{\partial H^{'}}{\partial Q} = \frac{\dot{F}}{\omega}\sqrt{2P}m\omega\,\sin Q,$$

co daje równania kanoniczne:

$$\begin{cases} \dot{P} = -\frac{\dot{F}}{\omega}\sqrt{2P}m\omega\,\sin Q \\ \dot{Q} = \omega - \frac{\dot{F}}{\omega}\frac{cosQ}{\sqrt{2m\omega P}} \end{cases} \tag{29}$$

Warto sprawdzić, że bezpośrednia zamiana funkcji $p(t), q(t)$ na nowe funkcje $Q(t), P(t)$ w (28) zgodnie ze wzorami (26) także prowadzi do układu (29).