Zadanie 1.

Rozważamy ruch opisany równaniem wymuszonego siłą F oscylatora harmonicznego o częstości własnej ω_0:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = F(t).$$

Podać rozwiązanie ogólne dla:

a) $F(t) = F_0 \cos \omega t$,

b) $F(t) = F_0 \cos^2 \omega t$.

W przypadku a) rozważyć przypadki $\omega \ll \omega_0$, $\omega \simeq \omega_0$ oraz $\omega \gg \omega_0$.

Zadanie 2.

Wyznaczyć amplitudę A i przesunięcie fazowe ϕ drgań wymuszonych dla tłumionego oscylatora harmonicznego:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + k\,x = F \cos \omega t,$$

w stanie ustalonym.

Naszkicować przebieg krzywych $A(\omega)$ i $\phi(\omega)$.

Zadanie 3.

Na jeziorze zaobserwowano pionowe oscylacje pokrywy lodowej o okresie $T = 20$ s. Oszacować grubość lodu.

Zadanie 4.

Ze środka sferycznie symetrycznej planetoidy o masie M i promieniu R wystrzelono z prędkością v_0 pocisk. Jaka jest minimalna prędkość niezbędna aby a) dotrzeć do powierzchni; b) opuścić pole grawitacyjne planetoidy, jeżeli rozkład gęstości ρ w zależności od promienia r wynosi:

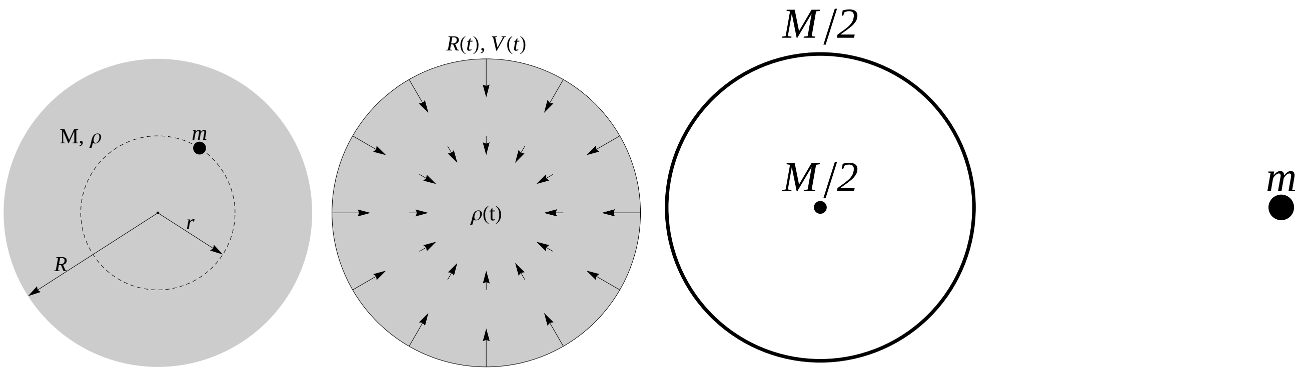
$$\rho = \rho_0 \tag{1a}$$

$$\rho = \rho_p \frac{r}{R} \tag{1b}$$

$$\rho = \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right) \tag{1c}$$

Zadanie 5.

Obliczyć częstość orbitalną dla grawitującego układu pokazanego na rysunku poniżej. Jednym ze składników jest jednorodna kula o masie M i promieniu R. Drugim, masa punktowa m poruszająca się *wewnątrz* masy M po okręgu o promieniu $r < R$ (Rys. 1, po lewej).



Rysunek 1: Ilustracja do Zad. 5 (po lewej), Zad. 6 (w środku) i Zad. 9 (po prawej).

Zadanie 6.

Obliczyć czas zapadania się do punktu pod wpływem własnej grawitacji (tzw. kolaps grawitacyjny) jednorodnej kuli „pyłu” o gestości ρ, zakładając, że w każdej chwili jej gęstość nie zależy od promienia (tzn. $\rho = \rho(t)$, Rys. 1, w środku).

Zadanie 7.

W opowiadaniu W. Gombrowicza *„Zdarzenia na brygu Banbury”* bohatera uwięziono na dnie oceanu w szklanej sferze wypełnionej powietrzem. Na skutek przerwania się łańcucha mocującego sferę do dna wypłynęła ona na powierzchnię. Oblicz przyspieszenie sfery w momencie zerwania się łańcucha. Czy pasażer mógł przeżyć to zdarzenie?

Zadanie 8.

Na stacji orbitalnej lewituje kula wody o promieniu R, a w niej bąbelek powietrza o promieniu $r \ll R$. Ile czasu potrwa ruch bąbelka na odległość $R/2$, jeżeli w chwili $t = 0$ znajduje się w odległości $R/2$ od centrum? Współczynnik oporu wyznaczyć według wzoru Stokesa.

Zadanie 9.

Wyznaczyć okres orbitalny dla układu składającego się z mas punktowych m i $M/2$, oraz sferycznej powłoki o masie $M/2$ (Rys. 1, po lewej).

Zadanie 10.

W nieskończonej przestrzeni wypełnionej substancją o gęstości ρ_0 umieszczamy w odległości d dwie kule o gęstościach i objętościach odpowiednio ρ_1, V_1 oraz ρ_2, V_2. Obliczyć siłę działającą pomiędzy kulami.

Zadanie 11*.

Powoli obracająca się ze stałą prędkością kątową nieściśliwa ciecz pod wpływem własnej grawitacji przyjmuje w stanie równowagi kształt elipsoidy obrotowej. Wyznaczyć jej prędkość kątową jako funkcję spłaszczenia i gęstości.