Zadanie 3.

Na szalkę początkowo spoczywającej wagi sprężynowej o masie m zrzucamy z wysokości h kulkę plasteliny o masie M. Oblicz amplitudę drgań wagi, jeżeli kulka przykleiła się do szalki, a sprężyna do której została przymocowana ma współczynnik k.

Zadanie 3.

Sposób I: rozwiązanie równania ruchu.

Wybieramy układ współrzędnych, w którym wysokość nad poziomem zamocowania sprężyny to $x(t)$. Oś x jest więc skierowana w górę. Szalka początkowo znajduje się na wysokości h_0. Druga zasada dynamiki Newtona daje nam równanie na $x(t)$ po przyklejeniu się masy M:

$$(m+M)\ddot{x} = F_s + F_g, \tag{1}$$

gdzie $a = \frac{dx(t)}{dt} \equiv \ddot{x}$ to przyspieszenie zapisane jako druga pochodna $x(t)$ po czasie. Na szalkę działają 2 siły: sprężystości F_s i przyciągania grawitacyjnego F_g:

$$F_s = -k(x(t) - l), \qquad F_g = -(m+M)g. \tag{2}$$

Równanie różniczkowe które należy rozwiązać ma postać oscylatora harmonicznego z dodatkową (stałą) siłą:

$$(m+M)\ddot{x} + k(x-l) = -(m+M)g. \tag{3}$$

Rozwiązanie tego równania to:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) + h_1, \tag{4}$$

gdzie:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}, \qquad h_1 = l - \frac{g(m+M)}{k}. \tag{5}$$

Aby wyznaczyć ruch musimy jeszcze podać położenie i prędkość początkową szalki, co pozwoli wyznaczyć z (4) A oraz ϕ. Warunki początkowe są następujące:

$$x(0) = h_0, \qquad \dot{x}(0) \equiv v(0) = v_0. \tag{6}$$

Położenie początkowe szalki h_0 możemy wyznaczyć zauważając, że w spoczynku siła sprężystości musi być zrównoważona siłą grawitacji:

$$k(l - h_0) = mg,$$

czyli:

$$x(0) = h_0 = l - \frac{mg}{k}. \tag{7}$$

Prędkość początkową wyznaczymy z zasady zachowania pędu w zderzeniu niesprężystym:

$$Mv_1 = (m+M)v_2,$$

gdzie prędkość spadającej z wysokości h nad szalką kulki obliczymy z zasady zachowania energii:

$$Mgh = \frac{Mv_1^2}{2}, \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Ostatecznie, drugi warunek początkowy przyjmuje postać:

$$\dot{x}(0) = v_2 = \frac{M}{M+m}\sqrt{2gh}. \tag{8}$$

Po wstawieniu $t = 0$ do (4) oraz pochodnej (4) i przyrównaniu do warunków początkowych (7) i (8) otrzymujemy:

$$A\cos\phi + h_1 = h_0, \tag{9a}$$

$$-A\omega\sin\phi = v_0. \tag{9b}$$

Ponieważ interesuje nas tylko amplituda, dzielimy drugie równanie przez ω, nastepnie podnosimy oba równania do kwadratu i dodajemy. Po skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ otrzymujemy:

$$A^2 = (h_0 - h_1)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2.$$

Po podstawieniu za h_0, h_1, v_0 oraz ω mamy:

$$A = \sqrt{\frac{M^2g^2}{k^2} + 2\frac{M^2gh}{k(M+m)}}. \tag{10}$$

Otrzymany wynik (10) jest poprawny ale niezrozumiały. Jest to typowa sytuacja wynikająca z rozwiązania równania Newtona ab initio. Wynik można zapisać nieco inaczej:

$$\frac{1}{2}kA^2 = Mgh\left(1 - \frac{m}{M+m} + \frac{1}{2}\frac{Mg/k}{h}\right).$$

Sens tego wyrażenia poznamy po rozwiązaniu zadania drugim sposobem.

Sposób II: zasada zachowania energii.

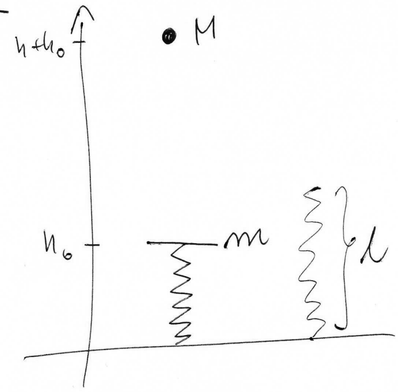
Skorzystamy z faktu iż suma energii składowych układu na początku i końcu eksperymentu musi być równa (Zob. rysunek).

Jako zero dla energii grawitacyjnej przyjmujemy dolny punkt zamocowania sprężyny, dla sprężyny energia wynosi zero gdy ma swoją długość „spoczynkową”. Całkowita energia przed rozpoczęciem eksperymentu wynosi:

$$E_{(I)} = Mg(h+h_0) + mgh_0 + \frac{1}{2}k(l-h_0)^2,$$

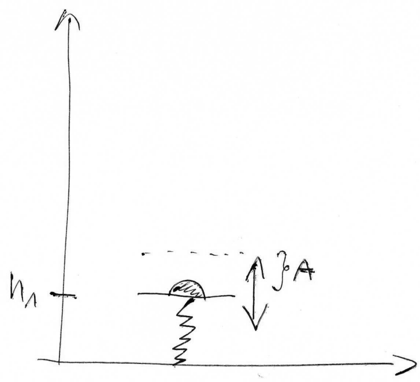
gdzie poszczególne składniki to:

I



$$E_{I} = Mg(h+h_0) + mgh_0 + \frac{1}{2}k(\lambda - h_0)^2$$

II



$$E_{II} = \frac{1}{2}kA^2 + g(m+M)h_1 + \frac{1}{2}k(\lambda - h_1)^2 + Q$$

1. $Mg(h + h_0)$ – grawitacyjna energia potencjalna kulki plasteliny o masie M na wysokości $h + h_0$
2. mgh_0 – grawitacyjna energia potencjalna szalki o masie m na wysokości h_0
3. $\frac{1}{2}k(l - h_0)^2$ – sprężysta energia potencjalna sprężyny o współczynniku k ściśnietej od długości l do długości h_0

Aby poprawnie zapisać energię, wyobraźmy sobie, że składamy eksperyment z elementów leżących na podłodze. Musimy wykonać pracę polegającą na:

- umieszczeniu kulki plasteliny na wysokości $h + h + 0$,
- ściśnięciu sprężyny,
- umieszczeniu szalki na wysokości h_0.

Po zakończeniu eksperymentu całkowita energia wynosi:

$$E_{(II)} = \frac{1}{2}kA^2 + (m + M)gh_1 + \frac{1}{2}k(l - h_1) + Q,$$

gdzie:

1. $\frac{1}{2}kA^2$ – całkowita energia ruchu drgającego o amplitudzie A
2. $(m + M)gh_1$ – grawitacyjna energia potencjalna szalki i kulki o łącznej masie $m + M$ na wysokości h_1
3. $\frac{1}{2}k(l - h_1)^2$ – sprężysta energia potencjalna sprężyny o współczynniku k ściśnietej od długości l do długości h_1
4. Q - ciepło wyzwolone w zderzeniu niesprężystym.

Zasada zachowania pozwala na zapisanie równości:

$$E_{(I)} = E_{(II)}.$$

Jedyną wielkością, której *nie obliczyliśmy* wcześniej jest ciepło Q. Obliczymy je jako różnicę energi kinetycznej układu kulka + szalka przed i po zderzeniu. Przed zderzeniem, jedynie kulka M posiada energię kinetyczną, równą grawitacyjnej energii potencjalnej wynikającej z jej wysokości nad szalką o masie m:

$$Q = Mgh - \frac{(m + M)v_2^2}{2} = \frac{mMgh}{M + m}.$$

Po wykonaniu niezbędnych uproszczeń otrzymujemy ten sam wzór co metodą I:

$$E_{oscy} = \frac{1}{2}kA^2 = Mgh\left(1 - \frac{m}{M + m} + \frac{1}{2}\frac{Mg/k}{h}\right). \tag{11}$$

Przeanalizujmy powyższy wzór. Jego „rdzeń” stanowi „naiwna” formuła:

$$E_{oscy} \simeq \frac{1}{2}kA^2 = Mgh.$$

O ile powyższy wzór nie jest ścisły, stanowi on bardzo dobre przybliżenie w „typowej” sytuacji. Aby doprecyzować co oznacza powyższe zdanie zbadajmy korekty do wzoru $E_{oscy} \simeq Mgh$:

$$1 - \frac{m}{M+m} + \frac{1}{2}\frac{Mg/k}{h}.$$

Drugi wyraz (ze znakiem minus) jest bezpośrednio związany z produkcją ciepła w zderzeniu niesprężystym. Znika gdy $m \to 0$ lub inaczej gdy $M \gg m$. Wyraz trzeci znika gdy $h \to \infty$, czyli kulkę zrzucamy z dużej wysokości. Jaką wysokość możemy uznać za „dużą”? Musi być ona większa niż:

$$h \gg \Delta x = \frac{Mg}{k}.$$

Wielkość Δx oznacza dodatkowe ugięcie sprężyny wywołane dodaniem masy M. Najprościej zrozumieć sens tego składnika rozpatrując przypadek $h \to 0$. Czyli nie zrzucamy, ale po prostu kładziemy delikatnie masę M na szalce. Wtedy:

$$A = \frac{Mg}{k} = h_0 - h_1,$$

czyli oscylacje mają amplitudę dokładnie równą dodatkowemu ugięciu sprężyny.

Zadanie 4.

Ciało o masie m zrzucamy z wysokości h, a opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości:

$$\vec{F}_{op} = -kv\vec{v}.$$

Wyznaczyć zależność prędkości spadania **od wysokości**.

Zadanie 5.

Z jaką prędkością kątową musi poruszać się punkt materialny po wewnętrznej powierzchni ustawionego pionowo w polu grawitacyjnym (wierzchołkiem w dół) stożka, aby utrzymywał się stale na wysokości h?

Zadanie 6.

Do jednego końca sprężyny o współczynniku k przymocowano masę m, a do drugiego końca przykładamy wzdłuż sprężyny siłę o małej wartości maksymalnej, zmieniającą się w czasie według prawa:

$$F = F_0 \sin \omega_0 t, \quad \text{gdzie:} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Znajdź wzór opisujący ruch masy m w zależności od czasu.