**Zadanie 1.**

Odpowiedź:

$$\frac{t_1 v_1^2 + t_2 v_2^2 - v_1 v_2 (t_1 + t_2)\cos(\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos(\alpha)}$$

**Zadanie 2.**

Oznaczamy moc traconą w hamulcach jako $P$. Po wprowadzeniu czasu hamowania $T = mv_0^2/2/P$ dostajemy wzory:

$$x(t) = \frac{2}{3}\frac{v_0}{T}\left[1 - (1 - t/T)^{3/2}\right]$$

$$v(t) = v_0\,(1 - t/T)^{1/2}$$

$$a(t) = -\frac{v_0}{2T}\,(1 - t/T)^{-1/2}$$

Droga hamowania wynosi $\frac{mv_0^3}{3P}$. Siła bezwładności działająca na pasażera wynosi $-ma(t)$ i dąży do nieskończoności dla $t \to T$.

**Zadanie 3.**

$$v_r = v/\operatorname{tg}\alpha \simeq 573 m/s.$$

**Zadanie 4.**

TODO

**Zadanie 5.**

Żelazną kulę o masie 1 kg wyrzucono pod kątem $\alpha = \pi/4$ z prędkością $v_0 = 200$ m/s. Oszacować maksymalny możliwy zasięg takiego rzutu, zakładając, że opór powietrza wynosi:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\,\rho C_d A v_o\,\mathbf{v}. \tag{1}$$

We wzorze (1) $\rho$ to gęstość powietrza, $C_d \simeq 1$ – bezwymiarowy współczynnik oporu, $A$ – przekrój czołowy. Wynik porównać z przypadkiem bez oporu (Zad. 13 z poprzedniego zestawu).

***Wskazówka:*** *równanie na zasięg nie jest rozwiązywalne symbolicznie poprzez funkcje elementarne. Zamiast tego należy przejść do granicy z czasem $t \to \infty$.*

Odpowiedź:

Przyjmując dane: gęstość powietrza 1 km/m$^3$, gęstość żelaza 7874 kg/m$^3$, dostajemy promień kuli 0.03118 m (3.1 cm), a więc $k = -\frac{1}{2}\,\rho C_d A v_o = 1.222$ kg/s.

Wzór na zależność odległości w poziomie od czasu wynosi:

$$x(t) = \frac{m}{k}\, v_0 \cos\alpha\, \left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Ponieważ granica:

$$\lim_{t\to\infty} 1 - e^{-kt/m} = 1,$$

zasięg można oszacować jako:

$$L = \frac{m}{k}\, v_0 \cos\alpha$$

Dla powyższych danych L=115.7 m, w porównaniu do 4077 metrów bez oporu. Różnica pomiędzy wynikiem otrzymanym jako granica dla $t \to \infty$ a czasem rzeczywistego upadku (wyznaczalnym numerycznie) jest na poziomie $10^{-8}$ ! Gdy weźmiemy np: kulę wolframową o masie 100 kg (co daje promień 10 cm), błąd jest znacznie większy: faktyczny zasięg wyniesie 922 m, podczas gdy w granicy otrzymamy 975 m.

**Zadanie 6.**

**Zadanie 7.**

Odpowiedź:

Zaniedbując $R$ w porównaniu z $L$ ($R \ll L$), oraz pomijając fizyczne parametry krążka, otrzymujemy równanie:

$$\ddot{l} = \frac{2g}{L}\, l - g,$$

gdzie $l(t)$ to długość jednego z końców liny. Dla $l(t) = L/2$, prawa strona jest równa zeru, i jest możliwe rozwiązanie $l(t) = 0$, oznaczające spoczynek. W pozostałych przypadkach lina zacznie się rozwijać. Oznaczając przed $\delta L$ różnicę pomiędzy końcem lewego i prawego fragmentu liny, otrzymujemy rozwiązanie równania:

$$l(t) = \frac{L}{2} + \delta L \cosh\left(\sqrt{\frac{2g}{L}} t\right).$$

Warunek całkowitego rozwinięcia się liny to $l(t) = L$, co daje:

$$t_{rozw} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{L}{2\delta L}\right).$$

Powyższy wzór można uprościć. Korzystając ze wzoru (w *Mathematice* użyj **TrigToExp**):

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{L}{2\delta L}\right) = \ln\left[\sqrt{\left(\frac{L}{2\delta L}\right)^2 - 1} + \frac{L}{2\delta L}\right]$$

i zakładając, że $\delta L \ll L$ otrzymujemy:

$$t_{rozw} \simeq \sqrt{\frac{L}{2g}} \ln\left(L/\delta L\right).$$

Wzór końcowy składa się z dwóch czynników: $\sqrt{\frac{L}{2g}}$, postaci podobnej do spadku swobodnego z wysokości $L/4$, oraz czynnika logarytmicznego, który bardzo wolno zależy od $\delta L$. Np: dla $\delta L/L = 0.01$ mamy $\ln 1/0.01 = 4.6$, a dla $\delta L/L = 0.001$ dostajemy $\ln 1/0.001 = 6.9$, czyli tylko 1.5 razy więcej. Decydującym czynnikiem fizycznym jest długość liny, a nie jej początkowe rozwinięcie.

**Zadanie 8.**

**Zadanie 9.**

**Zadanie 10.**