Zadanie 1.

Żelazną kulę o masie 1 kg wyrzucono pod kątem $\alpha = \pi/4$ z prędkością $v_0 = 200$ m/s. Oszacować maksymalny możliwy zasięg takiego rzutu, zakładając, że opór powietrza wynosi:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\,\rho C_d A v_o\,\mathbf{v}. \tag{1}$$

We wzorze (1) ρ to gęstość powietrza, $C_d \simeq 1$ – bezwymiarowy współczynnik oporu, A – przekrój czołowy. Wynik porównać z przypadkiem bez oporu (Zad. 13 z poprzedniego zestawu).

Wskazówka: *równanie na zasięg nie jest rozwiązywalne symbolicznie poprzez funkcje elementarne. Zamiast tego należy przejść do granicy z czasem $t \to \infty$.*

ODPOWIEDŹ:

Przyjmując dane: gęstość powietrza 1 km/m^3, gęstość żelaza 7874 kg/m^3, dostajemy promień kuli 0.03118 m (3.1 cm), a więc $k = -\frac{1}{2}\,\rho C_d A v_o = 1.222$ kg/s.

Wzór na zależność odległości w poziomie od czasu wynosi:

$$x(t) = \frac{m}{k}\,v_0 \cos\alpha\,\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Ponieważ granica:

$$\lim_{t\to\infty} 1 - e^{-kt/m} = 1,$$

zasięg można oszacować jako:

$$L = \frac{m}{k}\,v_0 \cos\alpha$$

Dla powyższych danych L=115.7 m, w porównaniu do 4077 metrów bez oporu. Różnica pomiędzy wynikiem dla $t \to \infty$ a czasem rzeczywistego upadku jest na poziomie 10^{-8}. Gdy weźmiemy np: kulę wolframową o masie 100 kg (co daje promień 10 cm) zasięg wyniesie 922 m, podczas gdy w granicy otrzymamy 975 m.

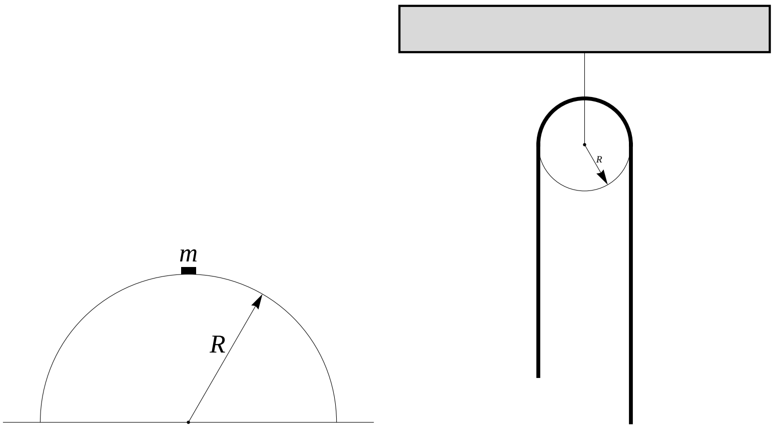
Zadanie 2.

Jeżeli klocek z Rys. 1 zsuwa się bez tarcia, to w którym miejscu oderwie się od kuli?

Zadanie 3.

Lina o długości L została zawieszona na bloczku o promieniu R (Rys. 1). Ile czasu zajmie rozwinięcie się liny pod wpływem jej własnego ciężaru?

ODPOWIEDŹ:



Rysunek 1: Ilustracja do Zad. 2(po lewej) i Zad. 3 (po prawej).

Zaniedbując R w porównaniu z L ($R \ll L$), oraz pomijając fizyczne parametry krążka, otrzymujemy równanie:

$$\ddot{l} = \frac{2g}{L}\, l - g,$$

gdzie $l(t)$ to długość jednego z końców liny. Dla $l(t) = L/2$, prawa strona jest równa zeru, i jest możliwe rozwiązanie $l(t) = 0$, oznaczające spoczynek. W pozostałych przypadkach lina zacznie się rozwijać. Oznaczając przed δL różnicę pomiędzy końcem lewego i prawego fragmentu liny, otrzymujemy rozwiązanie równania:

$$l(t) = \frac{L}{2} + \delta L \cosh\left(\sqrt{\frac{2g}{L}} t\right).$$

Warunek całkowitego rozwinięcia się liny to $l(t) = L$, co daje:

$$t_{rozw} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{L}{2\delta L}\right).$$

Powyższy wzór można uprościć. Korzystając ze wzoru (w *Mathematice* użyj **TrigToExp**):

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{L}{2\delta L}\right) = \ln\left[\sqrt{\left(\frac{L}{2\delta L}\right)^2 - 1} + \frac{L}{2\delta L}\right]$$

i zakładając, że $\delta L \ll L$ otrzymujemy:

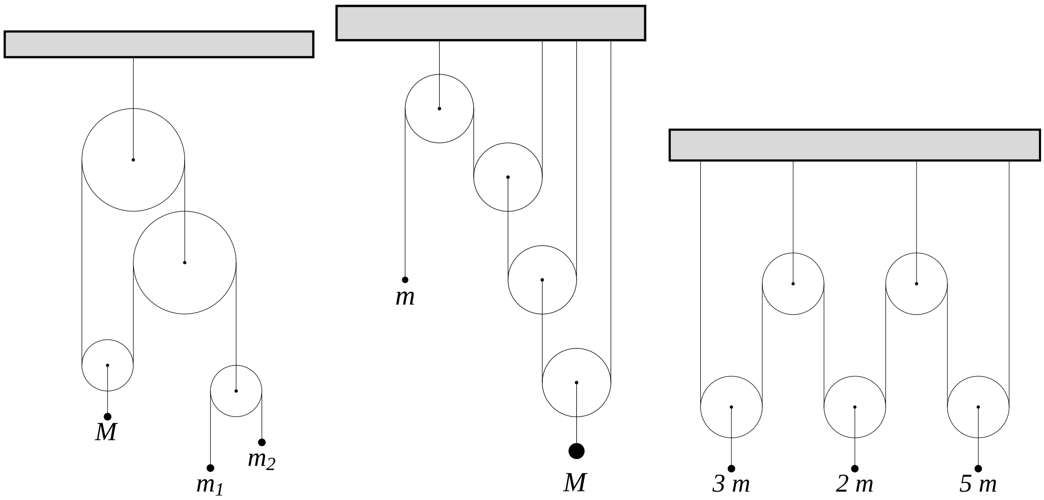
$$t_{rozw} \simeq \sqrt{\frac{L}{2g}} \ln\left(L/\delta L\right).$$

Wzór końcowy składa się z dwóch czynników: $\sqrt{\frac{L}{2g}}$, postaci podobnej do spadku swobodnego z wysokości $L/4$, oraz czynnika logarytmicznego, który bardzo wolno zależy od δL. Np: dla

$\delta L/L = 0.01$ mamy $\ln 1/0.01 = 4.6$, a dla $\delta L/L = 0.001$ dostajemy $\ln 1/0.001 = 6.9$, czyli tylko 1.5 razy więcej. Decydującym czynnikiem fizycznym jest długość liny, a nie jej początkowe rozwinięcie.

Zadanie 4.

Oblicz przyspieszenia z jakimi poruszają się masy w układach z Rys. 2.



Rysunek 2: Ilustracja do Zad. 4.

Odpowiedź:

Układ po lewej jest niemożliwy do fizycznej realizacji. W układzie środkowym przyspieszenia to:

$$a_m = 8g\frac{8m - M}{64m + M}, a_M = g\frac{M - 8m}{64m + M}.$$

W układzie po prawej otrzymujemy, numerując od lewej do prawej:

$$a_1 = \frac{1}{31}g, \quad a_2 = -\frac{14}{31}g, \quad a_3 = \frac{13}{31}g.$$

Zadanie 5.

Pokazać, że przyspieszenie styczne jest pochodną szybkości.

Zadanie 6.

Sześcian o boku a umieszczono w kartezjańskim układzie współrzędnych w ten sposób, że jego środek pokrywa się ze środkiem układu, natomiast wszystkie krawędzie są równoległe lub prostopadłe do jego osi. Podać współrzędne jego wierzchołków w układzie sferycznym r, θ, ϕ.

ODPOWIEDŹ:

We współrzędnych kartezjańskich współrzędne wierzchołków to:

$$\{\pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}, \pm\frac{a}{2}\}.$$

W postaci jawnej, 8 wierzchołków:

$$a\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Po transformacji:

$$\begin{pmatrix} r & \theta & \frac{\pi}{4} \\ r & \pi-\theta & \frac{\pi}{4} \\ r & \theta & -\frac{\pi}{4} \\ r & \pi-\theta & -\frac{\pi}{4} \\ r & \theta & \frac{3\pi}{4} \\ r & \pi-\theta & \frac{3\pi}{4} \\ r & \theta & -\frac{3\pi}{4} \\ r & \pi-\theta & -\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}$$

,

gdzie: $r = a\sqrt{3}/2$, $\theta = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2} \simeq 54.7^\circ$.