

Zadanie 1.

Oblicz iloczyn skalarny i wektorowy, kąt pomiędzy wektorami oraz długości wektorów:

$$\vec{u} = \{2, 3, 4\}, \quad \vec{v} = \{-1, -1, -1\}. \quad (1)$$

Znajdź rzut i długość rzutu wektora \vec{v} na wektor \vec{u} .

ODPOWIEDŹ:

- iloczyn skalarny $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$
- iloczyn wektorowy $\vec{u} \times \vec{v} = \{1, -2, 1\}$
- kąt pomiędzy wektorami: $\alpha = \arccos\left(-3\sqrt{\frac{3}{29}}\right) = 164.774842^\circ$
- długości wektorów: $|\vec{u}| = \sqrt{29}$, $|\vec{v}| = \sqrt{3}$
- długość rzutu wektora \vec{v} na wektor \vec{u} : $\vec{v} \cdot \hat{u} = -\frac{9}{\sqrt{29}}$, gdzie $\hat{u} = \vec{u}/|\vec{u}|$ oznacza wektor jednostkowy (wersor).
- rzut wektora \vec{v} na wektor \vec{u} : $\vec{v} \cdot \hat{u}\hat{u} = \left\{-\frac{18}{29}, -\frac{27}{29}, -\frac{36}{29}\right\}$

Zadanie 2.

Oblicz:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a^j b^k,$$

dla wektorów $\vec{a} = \{-1, 1, 0\}$, $\vec{b} = \{2, 2, -1\}$. Symbol $\varepsilon_{123} = 1$, a każde przestawienie wskaźników zmienia znak, np: $\varepsilon_{213} = -1$. Składowe, których nie da się otrzymać poprzez powyższe permutacje, t.j. o powtarzających się indeksach, są równe zero, np: $\varepsilon_{311} = 0$.

ODPOWIEDŹ:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{1jk} a^j b^k, = -1$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{2jk} a^j b^k, = -1$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{3jk} a^j b^k, = -4$$

Zadanie 4.

Dane są współrzędne wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1, 0, 1\}, \quad \mathbf{b} = \{1, -1, 1\}, \quad \mathbf{c} = \{1, -1, 0\}.$$

Oblicz:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a}. \quad (2)$$

ODPOWIEDŹ:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \{-1, 1, 1\}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 1, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 4, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c} = \{2, -2, 0\}, \quad \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} = -1. \quad (3)$$

Zadanie 5.

Przedyskutuj różne sposoby wyprowadzenia lub udowodnienia tożsamości:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (4)$$

ODPOWIEDŹ:

Istnieją co najmniej trzy metody wyprowadzenia:

- bezpośredni rachunek: podstawiamy $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, obliczamy lewą i prawą stronę tożsamości i sprawdzamy czy wyszło to samo
- (w skrócie) korzystamy ze wzorów: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a^j b^k$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a^i b^i$, stosujemy tożsamość $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$ i manipulujemy wskaźnikami aż do uzyskania tożsamości.
- korzystamy z dowolności wyboru układu współrzędnych tak aby wektor \mathbf{a} leżał na osi Ox: $\mathbf{a} = \{a_x, 0, 0\}$. Zmieniamy jednostki długości tak aby jego pierwsza składowa wyniosła 1: $\mathbf{a} = \{1, 0, 0\}$. Obracamy układ współrzędnych wokół osi Ox tak aby drugi z wektorów znalazł się na jednej z płaszczyzn, np: OXY, co daje np: $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, 0\}$. Dalsze obliczenia prowadzimy tak jak w pierwszej metodzie.

Zadanie 6.

ODPOWIEDŹ:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (5a)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (5b)$$

$$(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (5c)$$

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})] \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 \quad (5d)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (5e)$$

Zadanie 7.

Znajdź wektor prostopadły do każdego z wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1, 1, 1, 1\} \quad (6a)$$

$$\mathbf{b} = \{0, 0, 0, -1\}, \quad (6b)$$

$$\mathbf{c} = \{-1, 1, -1, 0\}. \quad (6c)$$

ODPOWIEDŹ:

W typowej sytuacji rozwiązaniem jest iloczyn wektorowy, np: ze wzoru:

$$\varepsilon_{ijkl} a^j b^k c^l.$$

W przestrzeni N-wymiarowej iloczyn wektorowy ma N-1 składników. Tu mamy N=4, co daje: odpowiedź:

$$\{-2, 0, 2, 0\}.$$

Oczywiście, prostopadły jest każdy wektor otrzymany przez pomnożenie powyższej odpowiedzi przed dowolną liczbę różną od zera.

Zadanie 8.

Jak sprawdzić równoległość wektorów o zadanych składowych w przestrzeni o dwóch, trzech i czterech wymiarach? Odpowiedź zilustruj przykładami.

Zadanie 9.

Dwa punkty materialne poruszają się na płaszczyźnie po torach będących liniami prostymi przecinającymi się pod kątem α . Punkt 1 porusza się z szybkością v_1 i mija punkt przecięcia w czasie t_1 . Punkt 2 porusza się z szybkością v_2 i mija punkt przecięcia w czasie t_2 . Obliczyć, w którym momencie odległość pomiędzy punktami będzie najmniejsza. Zbadać sensowność otrzymanego wyniku dla $t_1 = t_2$ oraz $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$.

ODPOWIEDŹ:

$$\frac{t_1 v_1^2 + t_2 v_2^2 - v_1 v_2 (t_1 + t_2) \cos(\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos(\alpha)}$$

Zadanie 10.

Zakładamy, że hamulce autobusu rozpraszają energię w stałym tempie. Obliczyć zależności położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu w trakcie hamowania od prędkości v_0 . Ile wynosi droga hamowania? Jakiej wielkości siły bezwładności działają na pasażerów?

ODPOWIEDŹ:

Oznaczamy moc traconą w hamulcach jako P . Po wprowadzeniu czasu hamowania $T = mv_0^2/2/P$ dostajemy wzory:

$$x(t) = \frac{2}{3} \frac{v_0}{T} \left[1 - (1 - t/T)^{3/2} \right]$$

$$v(t) = v_0 (1 - t/T)^{1/2}$$

$$a(t) = -\frac{v_0}{2T} (1 - t/T)^{-1/2}$$

Droga hamowania wynosi $\frac{mv_0^3}{3P}$. Siła bezwładności działająca na pasażera wynosi $-ma(t)$ i dąży do nieskończoności dla $t \rightarrow T$.

Zadanie 11.

Proste ostrze noża nachylone pod kątem $\alpha = 1^\circ$ do poziomu spada na poziomą kartkę papieru z szybkością 10 m/s. Z jaką prędkością porusza się punkt rozcinania?

ODPOWIEDŹ:

$$v_r = v / \operatorname{tg} \alpha \simeq 573 \text{ m/s.}$$

Zadanie 12.

Armata wystrzeliwuje pociski z prędkością $v_0 = 200$ m/s. Pod jakim kątem należy ustawić lufę, aby trafić w cel odległy o 2 km? Opór powietrza zaniedbać.

ODPOWIEDŹ:

Pod kątem około 15 lub 75 stopni.