Zadanie 1.

Oblicz iloczyn skalarny i wektorowy, kąt pomiędzy wektorami oraz długości wektorów:

$$\vec{u} = \{2, 3, 4\}, \qquad \vec{v} = \{-1, -1, -1\}. \tag{1}$$

Znajdź rzut i długość rzutu wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{u}$. Znormalizuj wektor $\vec{v}$ do jedności.

Zadanie 2.

Oblicz:

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a^j\, b^k,$$

dla wektorów $\vec{a} = \{-1, 1, 0\}, \vec{b} = \{2, 2, -1\}$. Symbol $\varepsilon_{123} = 1$, a każde przestawienie wskaźników zmienia znak, np: $\varepsilon_{213} = -1$. Składowe, których nie da się otrzymać poprzez powyższe permutacje, t.j. o powtarzających się indeksach, są równe zero, np: $\varepsilon_{311} = 0$.

Zadanie 3.

Rozwiązania równania:

$$2x^3 - 2x^2 - 11x + 4 = 0,$$

ustawione od najmniejszego do największego tworzą wektor $\vec{u}$. Wektor $\vec{v}$ jest cyklicznym przestawieniem współrzędnych wektora $\vec{u}$. Obliczyć iloczyn skalarny $\vec{u} \cdot \vec{v}$ oraz długość $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Zadanie 4.

Dane są współrzędne wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1, 0, 1\}, \quad \mathbf{b} = \{1, -1, 1\}, \quad \mathbf{c} = \{1, -1, 0\}.$$

Oblicz:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c},\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c},\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c},\ \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}},\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c},\ 1 + \mathbf{a},\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a},\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\, \mathbf{c},\ \mathbf{cba},\ e^{\mathbf{a}}. \tag{4}$$

Zadanie 5.

Przedyskutuj co najmniej trzy różne sposoby wyprowadzenia lub udowodnienia tożsamości:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{5}$$

Zadanie 6.

Oblicz:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \tag{6a}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} \tag{6b}$$

$$(\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} + 2\,\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \tag{6c}$$

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})] \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] - 3\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 \tag{6d}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{6e}$$

Zadanie 7.

Znajdź wektor prostopadły do każdego z wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1, 1, 1, 1\},\ \mathbf{b} = \{0, 0, 0, -1\},\ \mathbf{c} = \{-1, 1, -1, 0\}.$$

Przypadek „patologiczny”:

$$\mathbf{a} = \{1, 1, 1, 1\},\ \mathbf{b} = \{0, 0, 0, -1\},\ \mathbf{c} = \{-1, -1, -1, 0\}.$$

Zadanie 8.

Jak sprawdzić równoległość wektorów o zadanych składowych w przestrzeni o dwóch, trzech i czterech wymiarach? Odpowiedź zilustruj przykładami.

Zadanie 9.

Dwa punkty materialne poruszają się na płaszczyźnie po torach będących liniami prostymi przecinającymi się pod kątem α. Punkt 1 porusza się z szybkością v_1 i mija punkt przecięcia w czasie t_1. Punkt 2 porusza się z szybkością v_2 i mija punkt przecięcia w czasie t_2. Obliczyć, w którym momencie odległość pomiędzy punktami będzie najmniejsza. Zbadać sensowność otrzymanego wyniku dla $t_1 = t_2$ oraz $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$.

Zadanie 10.

Zakładamy, że hamulce autobusu rozpraszają energię w stałym tempie. Obliczyć zależności położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu w trakcie hamowania od prędkości v_0. Ile wynosi droga hamowania? Jakiej wielkości siły bezwładności działają na pasażerów?

Zadanie 11.

Proste ostrze noża nachylone pod kątem $\alpha = 1^\circ$ do poziomu spada na poziomą kartkę papieru z szybkością 10 m/s. Z jaką prędkością porusza się punkt rozcinania?

Zadanie 12.

Armata wystrzeliwuje pociski z prędkością $v_0 = 200$ m/s. Pod jakim kątem należy ustawić lufę, aby trafić w cel odległy o 2 km? Opór powietrza zaniedbać.