Zadanie 1.

Oblicz iloczyn skalarny i wektorowy, kąt pomiędzy wektorami oraz długości wektorów:

$$\vec{u} = \{2,3,4\}, \qquad \vec{v} = \{-1,-1,-1\}. \tag{1}$$

Znajdź rzut i długość rzutu wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{u}$.

Odpowiedź:

- iloczyn skalarny $\vec{u}\cdot\vec{v} = -9$
- iloczyn wektorowy $\vec{u}\times\vec{v} = \{1,-2,1\}$
- kąt pomiędzy wektorami: $\alpha = \arccos\left(-3\sqrt{\frac{3}{29}}\right) = 164.774842^\circ$
- długości wektorów: $|\vec{u}| = \sqrt{29}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{3}$
- długość rzutu wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{u}$: $\vec{v}\cdot\hat{u} = -\frac{9}{\sqrt{29}}$, gdzie $\hat{u} = \vec{u}/|\vec{u}|$ oznacza wektor jednostkowy (wersor).
- rzut wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{u}$: $\vec{v}\cdot\hat{u}\hat{u} = \left\{-\frac{18}{29}, -\frac{27}{29}, -\frac{36}{29}\right\}$

Zadanie 2.

Oblicz:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\, a^j\, b^k,$$

dla wektorów $\vec{a} = \{-1,1,0\}, \vec{b} = \{2,2,-1\}$. Symbol $\varepsilon_{123} = 1$, a każde przestawienie wskaźników zmienia znak, np: $\varepsilon_{213} = -1$. Składowe, których nie da się otrzymać poprzez powyższe permutacje, t.j. o powtarzających się indeksach, są równe zero, np: $\varepsilon_{311} = 0$.

Odpowiedź:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{1jk}\, a^j\, b^k, = -1$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{2jk}\, a^j\, b^k, = -1$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{3jk}\, a^j\, b^k, = -4$$

Zadanie 3.

Dane są współrzędne wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1,0,1\}, \quad \mathbf{b} = \{1,-1,1\}, \quad \mathbf{c} = \{1,-1,0\}.$$

Oblicz:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\ \mathbf{c}, \qquad \mathbf{cba}. \tag{2}$$

Odpowiedź:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \{-1,1,1\}, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = 1, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = 4, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\ \mathbf{c} = \{2,-2,0\}, \qquad \mathbf{cba} = -1. \tag{3}$$

Zadanie 4.

Przedyskutuj różne sposoby wyprowadzenia lub udowodnienia tożsamości:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{4}$$

Odpowiedź:

Istnieją co najmniej trzy metody wyprowadzenia:

- bezpośredni rachunek: podstawiamy $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \mathbf{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, obliczany lewą i prawą stronę tożsamości i sprawdzamy czy wyszło to samo
- (w skrócie) korzystamy ze wzorów: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk}\ a^j\, b^k,$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a^i\, b^i,$, stosujemy tożsamość $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ i manipulujemy wskaźnikami aż do uzyskania tożsamości.
- korzystamy z dowolności wyboru układu współrzędnych tak aby wektor $\mathbf{a}$ leżał na osi Ox: $\mathbf{a} = \{a_x, 0, 0\}$. Zmieniamy jednostki długości tak aby jego pierwsza składowa wyniosła 1: $\mathbf{a} = \{1,0,0\}$. Obracamy układ współrzędnych wokół osi Ox tak aby drugi z wektorów znalazł się na jednej z płaszczyzn, np: OXY, co daje np: $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, 0\}$. Dalsze obliczenia prowadzimy tak jak w pierwszej metodzie.

Zadanie 5.

Udowodnij, że wektory poniżej są prostopadłe:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \tag{5a}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} \perp (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \tag{5b}$$

Odpowiedź:

Najprostsza metoda to obliczenie iloczynu skalarnego i stosowanie tożsamości wektorowych. Jeżeli wyjdzie zero, to wektory są prostopadłe, np:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}\times(\mathbf{a}+\mathbf{c})-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\times(\mathbf{a}+\mathbf{c}) = 0$$

Aby zrozumieć powyższy wynik zauważamy, że mamy „zdegenerowany” potrójny iloczyn wektorowy, lub przestawiamy jego czynniki cyklicznie zgodnie z tożsamością $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}\equiv\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}$, tak aby otrzymać iloczyn wektorowy wektora przez siebie co daje wektor zerowy. Podobny wynik można dostać z rozważań czysto geometrycznych.

Zadanie 6.

Odpowiedź:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}-(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{6a}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{6b}$$

$$(\mathbf{b}-2\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}+2\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \tag{6c}$$

$$[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}-\mathbf{a})]\cdot[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})]-3\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 \tag{6d}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0 \tag{6e}$$

Zadanie 7.

Znajdź wektor prostopadły do każdego z wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1,1,1,1\} \tag{7a}$$

$$\mathbf{b} = \{0,0,0,-1\}, \tag{7b}$$

$$\mathbf{c} = \{-1,-1,-1,0\}. \tag{7c}$$

Odpowiedź:

W typowej sytuacji rozwiązaniem jest iloczyn wektorowy, np: ze wzoru:

$$\varepsilon_{ijkl}a^j b^k c^l.$$

Niestety, w tym konkretnym przypadku powyższa metoda zawodzi. Pierwszy student, który wyjaśni dlaczego, i w tej sytuacji rozwiąże zadanie otrzyma dodatkowe 0.5 stopnia do oceny końcowej. Rozwiązanie w postaci wektora zerowego nie jest akceptowalne.

Zadanie 8.

Jak sprawdzić równoległość wektorów o zadanych składowych w przestrzeni o dwóch, trzech i czterech wymiarach? Odpowiedź zilustruj przykładami.

Zadanie 9.

Dwa punkty materialne poruszają się na płaszczyźnie po torach będących liniami prostymi przecinającymi się pod kątem α. Punkt 1 porusza się z szybkością v_1 i mija punkt przecięcia w czasie t_1. Punkt 2 porusza się z szybkością v_2 i mija punkt przecięcia w czasie t_2. Obliczyć, w którym momencie odległość pomiędzy punktami będzie najmniejsza. Zbadać sensowność otrzymanego wyniku dla $t_1 = t_2$ oraz $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$.

Odpowiedź:

$$\frac{t_1 v_1^2 + t_2 - v_1 v_2 (t_1 + t_2) \cos(\alpha) v_2^2}{v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos(\alpha)}$$

Zadanie 10.

Zakładamy, że hamulce autobusu rozpraszają energię w stałym tempie. Obliczyć zależności położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu w trakcie hamowania od prędkości v_0. Ile wynosi droga hamowania? Jakiej wielkości siły bezwładności działają na pasażerów?

Odpowiedź:

Oznaczamy moc traconą w hamulcach jako P. Po wprowadzeniu czasu hamowania $T = mv_0^2/2/P$ dostajemy wzory:

$$x(t) = \frac{2}{3}\frac{v_0}{T}\left[1 - (1 - t/T)^{3/2}\right]$$

$$v(t) = v_0 (1 - t/T)^{1/2}$$

$$a(t) = -\frac{v_0}{2T}(1 - t/T)^{-1/2}$$

Droga hamowania wynosi $\frac{mv_0^3}{3P}$. Siła bezwładności działająca na pasażera wynosi $-ma(t)$ i dąży do nieskończoności dla $t \to T$.

Zadanie 11.

Proste ostrze noża nachylone pod kątem $\alpha = 1°$ do poziomu spada na poziomą kartkę papieru z szybkością 10 m/s. Z jaką prędkością porusza się punkt rozcinania?

Odpowiedź:

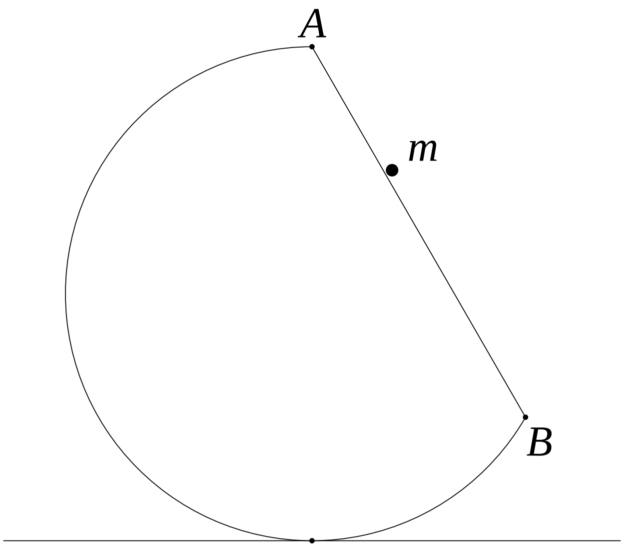
$$v_r = v / \operatorname{tg} \alpha \simeq 573 m/s.$$

Zadanie 12.

Ile czasu potrzeba aby punkt materialny zsunął się od punktu A do punktu B (Rys. 1)?

Odpowiedź:

$$T = 2\sqrt{\frac{R}{g}}.$$



Rysunek 1: Okrąg ma promień R, a nat. pola grawitacyjnego o wartości g jest skierowane w dół.

Zadanie 13.

Armata wystrzeliwuje pociski z prędkością $v_0 = 200$ m/s. Pod jakim kątem należy ustawić lufę, aby trafić w cel odległy o 2 km? Opór powietrza zaniedbać.

Odpowiedź:

Pod kątem około 15 lub 75 stopni.