

Zadanie 1.

Oblicz iloczyn skalarny i wektorowy, kąt pomiędzy wektorami oraz długości wektorów:

$$\vec{u} = \{2, 3, 4\}, \quad \vec{v} = \{-1, -1, -1\}. \quad (1)$$

Znajdź rzut i długość rzutu wektora \vec{v} na wektor \vec{u} .

Zadanie 2.

Oblicz:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a^j b^k,$$

dla wektorów $\vec{a} = \{-1, 1, 0\}$, $\vec{b} = \{2, 2, -1\}$. Symbol $\varepsilon_{123} = 1$, a każde przestawienie wskaźników zmienia znak, np: $\varepsilon_{213} = -1$. Składowe, których nie da się otrzymać poprzez powyższe permutacje, t.j. o powtarzających się indeksach, są równe zero, np: $\varepsilon_{311} = 0$.

Zadanie 3.

Dane są współrzędne wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1, 0, 1\}, \quad \mathbf{b} = \{1, -1, 1\}, \quad \mathbf{c} = \{1, -1, 0\}.$$

Oblicz:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a}. \quad (3)$$

Zadanie 4.

Przedyskutuj różne sposoby wyprowadzenia lub udowodnienia tożsamości:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (4)$$

Zadanie 5.

Udowodnij, że wektory poniżej są prostopadłe:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (5a)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} \perp (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \quad (5b)$$

Zadanie 6.

Oblicz:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad (6a)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} \quad (6b)$$

$$(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \quad (6c)$$

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})] \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 \quad (6d)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (6e)$$

Zadanie 7.

Znajdź wektor prostopadły do każdego z wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1, 1, 1, 1\} \quad (7a)$$

$$\mathbf{b} = \{0, 0, 0, -1\}, \quad (7b)$$

$$\mathbf{c} = \{-1, -1, -1, 0\}. \quad (7c)$$

Zadanie 8.

Jak sprawdzić równoległość wektorów o zadanych składowych w przestrzeni o dwóch, trzech i czterech wymiarach? Odpowiedź zilustruj przykładami.

Zadanie 9.

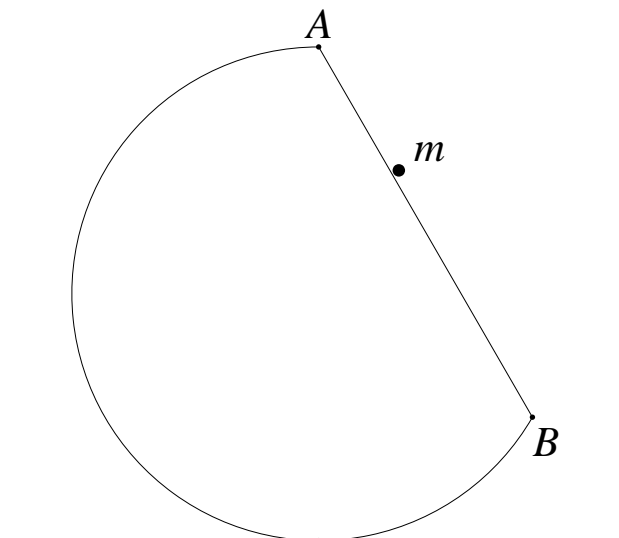
Dwa punkty materialne poruszają się na płaszczyźnie po torach będących liniami prostymi przecinającymi się pod kątem α . Punkt 1 porusza się z szybkością v_1 i mija punkt przecięcia w czasie t_1 . Punkt 2 porusza się z szybkością v_2 i mija punkt przecięcia w czasie t_2 . Obliczyć, w którym momencie odległość pomiędzy punktami będzie najmniejsza. Z badać sensowność otrzymanego wyniku dla $t_1 = t_2$ oraz $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$.

Zadanie 10.

Zakładamy, że hamulce autobusu rozpraszają energię w stałym tempie. Obliczyć zależności położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu w trakcie hamowania od prędkości v_0 . Ile wynosi droga hamowania? Jakiej wielkości siły bezwładności działają na pasażerów?

Zadanie 11.

Proste ostrze noża nachylone pod kątem $\alpha = 1^\circ$ do poziomu spada na poziomą kartkę papieru z szybkością 10 m/s. Z jaką prędkością porusza się punkt rozcinania?



Rysunek 1: Okrąg ma promień R , a nat. pola grawitacyjnego o wartości g jest skierowane w dół.

Zadanie 12.

Ile czasu potrzeba aby punkt materialny zsunął się od punktu A do punktu B (Rys. 1)?

Zadanie 13.

Armata wystrzeliwuje pociski z prędkością $v_0 = 200$ m/s. Pod jakim kątem należy ustawić lufę, aby trafić w cel odległy o 2 km? Opór powietrza zaniedbać.