# Rozwiązanie zadania dotyczącego kolapsu grawitacyjnego.

Jeżeli zauważymy, że punkt materialny o zaniedbywalnie małej masie (tzw. ciało próbne) na powierzchni kuli porusza się pod wpływem całej masy $M$, zadanie można sprowadzić do spadku swobodnego w polu masy punktowej. Zadanie rozwiążemy korzystając z zasady zachowania energi mechanicznej. Energię kinetyczną oznaczam przez $T$, a grawitacyjną energię potencjalną przez $U$:

$$T_0 + U_0 = T_1 + U_1.$$

W chwili $t = 0$ mamy:

$$T_0 = 0, \quad U_0 = -\frac{GMm}{R},$$

natomiast w pewnej chwili $t > 0$ dla masy próbnej znajdującej się w odległości $r < R$:

$$T_1 = \frac{1}{2}mv^2, \quad U_1 = -\frac{GMm}{r}.$$

Zasada zachowania energii może być zapisana jako:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{R} + \frac{GMm}{r}. \tag{1}$$

Masa ciała $m$ upraszcza się, zgodnie z zasadą równoważności (ruch ciała próbnego w polu grawitacyjnym nie zalezy od jego masy). Przekształcamy wzór (1):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Wyciągamy obustronnie pierwiastek, co daje:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}.$$

We wzorze powyżej musimy wziąć znak „minus”, gdyż wiadomo, że promień $r$ będzie malał z czasem[1]. Mnożymy przez $dt$, przenosimy wyrażenia zawierające $r$ na lewą stronę co daje:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} = \sqrt{2GM}dt.$$

Całkujemy obustronnie, a granice całkowania ustalamy tak, aby w chwili $t = 0$ promień wynosił $R$, natomiast w chwili końcowej, którą oznaczamy przez $T$, powinno być $r = 0$:

$$-\int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} = \sqrt{2GM}\int_0^T dt. \tag{2}$$

[1] Znak „plus” oznaczałby wybuch. W ten sposób można otrzymać najprostszy model Wielkiego Wybuchu

Całkę po prawej stronie obliczamy bez problemu:

$$\int_0^T dt = t\Big|_{t=0}^{t=T} = T - 0 = T.$$

Całka po prawej stronie (2) wymaga znacznie więcej zachodu. Po pierwsze przekształcamy:

$$-\int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}} = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}}.$$

Następnie dokonujemy zamiany zmiennych w całce:

$$\frac{r}{R} = u, \quad dr = Rdu,$$

oraz zmiany granic całkowania: dla $r = 0$ dostajemy $u = 0$, a dla $r = R$ dostajemy $u = 1$:

$$\int_0^1 \frac{Rdu}{\sqrt{\frac{1}{Ru} - \frac{1}{R}}} = R^{3/2} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u} - 1}}.$$

Warto zwrócić uwagę, że obliczenie całki:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u} - 1}} = \lambda, \tag{3}$$

zostało w tym momencie „odseparowane” od zadania fizycznego. Całka (3) jest pewną liczbą, której możemy przypisać pewien symbol (np. $\lambda$) i kontynuować zadanie traktując $\lambda$ podobnie jak inne stałe fizyczne i matematyczne, $\pi, G$ itd. To, że chwilowo nie wiemy ile wynosi wartość $\lambda$ nie powinno powstrzymywać od dalszego rozwiązywania zadania. Podobnie, większość studentów nie wie z pamięci ile wynosi w układzie SI liczbowa wartość $G = 6.674 \times 10^{-11} m^3/s^2/kg$. Później pokażemy, że:

$$\lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Ostatecznie otrzymujemy wyrażenie:

$$R^{3/2}\lambda = \sqrt{2GM}\, T$$

czyli:

$$T = \lambda\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}.$$

Wstawiając $M = V_{kuli}\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, oraz $\lambda = \pi/2$ dostajemy:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}.$$

# Obliczenie $\lambda$.

W całce (3) dokonujemy podstawienia:

$$\sqrt{\frac{1}{u} - 1} = \operatorname{tg} y, \quad \text{inaczej:} \quad u = \cos^2 y$$

co daje:

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{u} - 1}} \frac{-1}{u^2} du = \frac{dy}{\cos^2 y}$$

po uproszczeniu:

$$du = -2 \operatorname{tg} y dy.$$

Granice całkowania zmieniają się następująco: dla $u \to 0$ $y \to \pi/2$, natomiast dla $u = 1$, $\operatorname{tg} y = 1$ czyli $y = \pi/4$. Po zamianie zmiennych i granic otrzymujemy:

$$\lambda = -2 \int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} dy = 2\ y \Big|_{y=\pi/4}^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Dla zainteresowanych podaję, że po podstawieniu:

$$\sqrt{\frac{1}{u} - 1} = z$$

i zamianie zmiennych otrzymujemy:

$$\lambda = 2 \int\limits_0^\infty \frac{dz}{(1 + z^2)^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1 + z^2)^2}.$$

Ostatnia całka jest klasycznym zadaniem ilustrującym obliczanie całek oznaczonych metodą całkowania po konturach. Jest ono rozwiązane szczegółowo w anglojęzycznej Wikipedii, hasło *Methods of contour integration*, przykład I (Example (I)).