

ZESTAW ZADAŃ 8

Zadanie 8.1

Zbadać przebieg funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad (1a) \quad f(x) = \frac{x^2}{|x|-1} \quad (1b) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} \quad (1c)$$

Zadanie 8.2

Udowodnić, że, dla dowolnych funkcji $f(x), g(x), h(x)$ oraz liczb naturalnych n, m, l zachodzi:

$$\frac{[f^n g^m h^l]'}{f^n g^m h^l} = n \frac{f'}{f} + m \frac{g'}{g} + l \frac{h'}{h}. \quad (2)$$

Primem oznaczono różniczkowanie po x .

Zadanie 8.3

Korzystając z twierdzenia de L'Hospitala obliczyć granice w typowych przypadkach:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}, \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \quad (3a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x/2)}{\pi - x}, \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad (3b)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x, \quad (0 \cdot \infty) \quad (3c)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right), \quad (\infty - \infty) \quad (3d)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}, \quad (1^\infty) \quad (3e)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{1/x}, \quad (0^0) \quad (3f)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\exp x)^{e^{-x}}, \quad (\infty^0) \quad (3g)$$

Zadanie 8.4

Znajdź ekstrema funkcji:

$$f(x) = |x|^x \quad (4)$$