

ZESTAW ZADAŃ 6

Zadanie 6.1

Dane są cztery funkcje:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1 - \frac{1}{2x}, \quad f_3(x) = \frac{x-1}{2x-1}, \quad f_4(x) = \frac{1}{2(1-x)} \quad (1)$$

- a) Wyznaczyć złożenia każdej z podanych funkcji z pozostałymi (a także z sobą samą) wypełniając tabelkę:

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	$(f_1 \circ f_1)(x)$	$(f_1 \circ f_2)(x)$	$(f_1 \circ f_3)(x)$	$(f_1 \circ f_4)(x)$
f_2	$(f_2 \circ f_1)(x)$	$(f_2 \circ f_2)(x)$	$(f_2 \circ f_3)(x)$	$(f_2 \circ f_4)(x)$
f_3	$(f_3 \circ f_1)(x)$	$(f_3 \circ f_2)(x)$	$(f_3 \circ f_3)(x)$	$(f_3 \circ f_4)(x)$
f_4	$(f_4 \circ f_1)(x)$	$(f_4 \circ f_2)(x)$	$(f_4 \circ f_3)(x)$	$(f_4 \circ f_4)(x)$

- b) Obliczyć funkcje odwrotne $f_1^{-1}(x), f_2^{-1}(x), f_3^{-1}(x), f_4^{-1}(x)$.
- c) Jeżeli podpunkty a) i b) zostały wykonane poprawnie, to każda z 20 odpowiedzi powinna być jedną z funkcji f_1, f_2, f_3 lub f_4 . Przepisać wyniki podpunktów a) i b) używając tylko i wyłącznie symboli zadanych funkcji, np. $f_1 \circ f_1 = f_1$, itd.
- d) Określić dziedzinę i zbiór wartości funkcji f_1, f_2, f_3 i f_4

Zadanie 6.2

Wyznacz złożenie funkcji $f \circ g \circ g \circ f$, jeżeli:

$$f(x) = -x, \quad g(x) = x + 1. \quad (2)$$

Zadanie 6.3

Wyznacz złożenie funkcji:

$$f \circ g, \quad \text{oraz} \quad g \circ f$$

dla:

$$f(x) = x - 2, \quad g(x) = x/2 \quad (3a)$$

$$f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = -e^{\sqrt{x}} \quad (3b)$$

$$f(x) = \pm x, \quad g(x) = \mp x \quad (3c)$$

$$f(x) = \frac{1}{2-2x}, \quad g(x) = -\frac{2x+3}{2x+1} \quad (3d)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = -x \quad (3e)$$

Zadanie 6.4

Udowodnij, że wynikiem n -krotnego ($n > 1$) złożenia funkcji:

$$f(x) = 1 + 1/x \quad (4)$$

jest funkcja:

$$g(x) = \frac{u_n + u_{n+1} x}{u_{n-1} + u_n x}$$

gdzie przez u_n oznaczono kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego i $x \neq 0$.

Zadanie 6.5

Określ dziedzinę, podaj prostszy wzór i narysuj wykres funkcji:

$$f(x) = \cos(\arccos x) \quad (5a)$$

$$f(x) = \arccos(\cos x) \quad (5b)$$

Zadanie 6.6

Przekształcając wykres funkcji $f(x) = 1/x$ naszkicuj wykres funkcji:

$$g(x) = \left| \frac{1}{x-1} - 1 \right| \quad (6)$$

Zadanie 6.7

Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = -2 \ln |\sqrt{2}x + 2| \quad (7)$$