

ZESTAW ZADAŃ 4

Zadanie 4.1

Oblicz:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dla:

$$f(x) = x^2 \quad (1a)$$

$$f(x) = \exp x \quad (1g)$$

$$f(x) = x^3 \quad (1b)$$

$$f(x) = 1 \quad (1h)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (1c)$$

$$f(x) = \sin x \quad (1i)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (1d)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1e)$$

$$f(x) = \cos x \quad (1j)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (1f)$$

$$f(x) = \ln x \quad (1k)$$

Zadanie 4.2

Zakładamy, że poniższa granica istnieje i jest znana:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = g(x).$$

Obliczyć:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{h(x+\epsilon) - h(x)}{\epsilon},$$

gdzie:

$$h(x) = f(\lambda x), \quad \lambda > 0.$$

Zadanie 4.3

Dla podpunktów $a)$, $d)$, $g)$, oraz $i)$ z Zad. 4.1 oblicz:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Zadanie 4.4

Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x)$$

dla:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (4a)$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4e)$$

$$f(x) = x^3 \quad (4b)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (4f)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (4c)$$

$$f(x) = e^{-1/x} \quad (4g)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (4d)$$

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (4h)$$

Ustal, czy punkt $x = 0$ jest punktem nieciągłości usuwalnej. Jeżeli tak, to podaj wartość $f(0)$ która uczyni funkcję $f(x)$ ciągłą w zerze.

Zadanie 4.5

Zakładamy, że poniższe granice istnieją i są znane:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = f'(x),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} = g'(x).$$

Obliczyć:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{h(x+\epsilon) - h(x)}{\epsilon},$$

dla:

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} \quad (5a)$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (5c)$$

$$h(x) = f(x)g(x) \quad (5b)$$