

ZESTAW ZADAŃ 3

Zadanie 3.1

Udowodnij korzystając z definicji granicy podanej na wykładzie (Def 2.3, Wykład 3), że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0. \quad (1)$$

Zadanie 3.2

Korzystając z wyniku poprzedniego zadania oraz twierdzenia o granicy iloczynu oblicz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k}, \quad (2)$$

dla $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3.3

Udowodnij, że dla $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| + |y| \geq |x + y| \quad (3)$$

Zadanie 3.4

Udowodnij, że jeżeli istnieją granice ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

to ciąg $c_n = a_n + b_n$ ma granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A + B. \quad (4)$$

Wskazówka: skorzystaj z wyniku poprzedniego zadania i definicji granicy ciągu.

Zadanie 3.5

Korzystając z odpowiednich twierdzeń, uzasadnij ile wynoszą granice ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \quad (5a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} \quad (5b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3+3} \quad (5c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} \quad (5d)$$

Zadanie 3.6

Obliczyć granice ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1 \quad (6a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \quad (6b)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + 1 \right)^2 + 1 \quad (6c)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 1}{1 + n^2} - n \right) \quad (6d)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} \quad (6e)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2+n}}}{n^2 + 1} \quad (6f)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + 1 \right)^2 \quad (6g)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 5n \quad (6h)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+n} \quad (6i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n-3} \quad (6j)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)^{1/n} \quad (6k)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad (6l)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \quad (6m)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n-1} \quad (6n)$$