

ZESTAW ZADAŃ 2

Zadanie 2.1

Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnij wzory:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{2} + n = \frac{1}{2} (n + 6n^2) \quad (1a)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k + 1}{k^2 + k} = \frac{n(n+2)}{n+1} \quad (1b)$$

Zadanie 2.2

Sprawdź dla $n = 1, 2, 3, \dots$ poprawność wzoru:

$$\sum_{k=1}^n n^k = \frac{1 - n^{n+1}}{1/n - 1}. \quad (2)$$

Udowodnij wzór korzystając ze znanych własności szeregu geometrycznego.

Zadanie 2.3

Wykaż, że wyrazy ciągu Fibonacciego f_k można obliczyć ze wzoru:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\gamma^k - \frac{(-1)^k}{\gamma^k} \right), \quad \gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (3)$$

Zadanie 2.4

Udowodnij, że dla ciągu Fibonacciego f_n prawdziwe są wzory:

$$\sum_{k=1}^n f_k = f_{n+2} - 1 \quad (4a)$$

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 = f_{n+1} f_n \quad (4b)$$

Zadanie 2.5

Udowodnij korzystając z definicji granicy podanej na wykładzie (Def 2.3, Wykład 3), że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \quad (5)$$

Zadanie 2.5

Korzystając z wyniku poprzedniego zadania oraz twierdzenia o granicy iloczynu oblicz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k}, \quad (6)$$

dla $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2.7

Ustal (oblicz), ile wynoszą granice ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \quad (7a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} \quad (7b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3+3} \quad (7c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} \quad (7d)$$

Zadanie 2.8

Obliczyć granice ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1 \quad (8a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2+n}}}{n^2 + 1} \quad (8f)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)^{1/n} \quad (8k)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \quad (8b)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n[n(n-1)-1]}{n^2(n^2+1)+1} \quad (8c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n(n-2)}{n^2-n} \quad (8g)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad (8l)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{1+n^2} - n \right) \quad (8d)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \quad (8h)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+n} \quad (8i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \quad (8m)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \quad (8e)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n-3} \quad (8j)$$