ZESTAW ZADAŃ 1: rozwiązania wybranych zadań

Zadanie 1.1

Zadanie rozwiążemy korzystajac z równości $1+1=2$ oraz wzoru na dwumian:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k. \tag{1a}$$

Podstawiamy do wzoru $a=1$ i $b=1$:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\, 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{1b}$$

Analogicznie rozwiązujemy drugą część, korzystając z $1-1=0$ i wstawiając $a=1$ i $b=-1$ do (1a).

Zadanie 1.6c

Korzystając z wyniku Zad. 1.6b dostajemy:

$$|x| = |x-y+y| \leqslant |x-y| + |y|. \tag{2a}$$

Przenosząc $|y|$ z prawej strony na lewą dostajemy:

$$|x| - |y| \leqslant |x-y|. \tag{2b}$$

Wykonując analogiczne przekształcenia:

$$|y| = |y-x+x| \leqslant |y-x| + |x| = |x-y| + |x|, \tag{2c}$$

dostajemy:

$$|y| - |x| \leqslant |x-y|, \quad \text{czyli:} \quad |x| - |y| \geqslant -|x-y|. \tag{2d}$$

Uwzględniając (2b) i (2d) dostajemy:

$$-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y|, \tag{2e}$$

co na mocy wyniku Zad. 1.6a jest równoważne:

$$||x| - |y|| \leqslant |x-y|. \tag{2f}$$

andrzej.odrzywolek@uj.edu.pl

Zadanie 1.12b

Dowód przeprowadzimy dla $a = 2$ celem ustalenia uwagi. Wszystkie wyrazy ciągu są dodatnie, czyli:

$$0 < \frac{2^n}{n!}. \tag{3a}$$

Z drugiej strony, dla $n > 2$ mamy:

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} = \frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3} \ldots \frac{2}{n-1}\frac{2}{n} < \frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3} \ldots \frac{2}{3}\frac{2}{3} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}. \tag{3b}$$

Pokazaliśmy, że wyrazy badanego ciągu znajdują się pomiędzy:

$$0 < \frac{2^n}{n!} < 2\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^n. \tag{3c}$$

Granica ciągu składającego się z samych zer po lewej stronie (3c) to oczywiście zero. Granica ciągu po prawej stronie:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \tag{3d}$$

jako ciągu potęg dodatniej liczby mniejszej od 1. Na mocy twierdzenia o trzech ciągach dostajemy :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0. \tag{3e}$$

Dowód dla dowolnego innego $a > 1$ jest analogiczny.

Zadanie 1.12c

Rozważmy ciąg równości i nierówności:

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(1 + \sqrt[n]{n} - 1\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) + \binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 + \ldots. \tag{4a}$$

Ponieważ $\sqrt[n]{n} > 1$, obliczając symbole Newtona dostajemy oszacowanie:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)+\binom{n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2+\ldots > 1+n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)+\frac{(n-1)n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2, \tag{4b}$$

czyli:

$$n > \frac{(n-1)n}{2}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2. \tag{4c}$$

Skracając przez n i wyliczając $\sqrt[n]{n}-1$ dostajemy:

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \tag{4d}$$

Granica prawej strony to:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0. \tag{4e}$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach dostajemy:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0, \tag{4f}$$

czyli:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{4g}$$

Zadanie 1.12f

Idea rozwiązania jest podobna do Zad. 1.12b, tj. potrzebujemy dwóch oszacowań, z których jedno to zero. Aby znaleźć drugie, wykażemy indukcyjnie, że:

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{2^n}, \quad \text{dla}, \quad n > 5. \tag{5a}$$

Krok pierwszy: sprawdzamy (5a) dla $n = 6$:

$$\frac{6!}{6^6} < \frac{1}{2^6} \quad \rightarrow \quad 6! < \frac{6^6}{3^6} = \left(\frac{6}{3}\right)^6 = 3^6 \quad \rightarrow \quad 80 < 81. \tag{5b}$$

Krok drugi: wykażemy, że jeżeli dla pewnego $n > 6$ zachodzi:

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{2^n}, \tag{5c}$$

to także dla $n + 1$ (zamieniamy wszędzie $n \rightarrow (n + 1)$) mamy:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} < \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{5d}$$

Dowód przeprowadzimy z korzystając z równoważnej postaci nierówności (5a):

$$2^n \frac{n!}{n^n} < 1. \tag{5e}$$

Zachodzi ciąg przekształceń:

$$2^{n+1}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = 2 \cdot 2^n \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n (n+1)^1} = 2 \cdot 2^n \frac{n!}{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 2^n \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}. \tag{5f}$$

Wyraz:

$$2^n \frac{n!}{n^n} < 1$$

na mocy założenia indukcyjnego, a drugi składnik

$$\frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1, \quad \text{gdyż ciąg:} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest rosnący, a jego najmniejsza wartość to 2 (patrz Wykład 5; granica tego ciągu to oczywiście e).

Dowiedliśmy, że dla $n > 5$ zachodzi:

$$0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{2^n}. \tag{5g}$$

Ponieważ granice lewego i prawego oszacowania to zera, dostajemy odpowiedź:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \tag{5h}$$