Zestaw zadań 1

Zadanie 1.1

Pokaż, że dla dowolnych całkowitych liczb $k \leqslant n$ prawdziwy jest wzór:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \tag{1}$$

Zadanie 1.2

Sprawdź dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ czy prawdziwy jest wzór:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k} = \frac{1}{3}\left[8^n + 2(-1)^n\right] \tag{2}$$

Zadanie 1.3

Wyprowadź wzory „skróconego mnożenia” na:

$$(a+b)^3 \tag{3a}$$

$$x^3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 \tag{3c}$$

$$(1+\epsilon)^4 \tag{3b}$$

$$(1+\sqrt{\epsilon-1})^4 - \epsilon^2 \tag{3d}$$

Zadanie 1.4

Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnij wzory:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \tag{4a}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \tag{4b}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n \tag{4c}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1+(-1)^n}{2} \tag{4d}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2+k} = \frac{n(n+2)}{n+1} \tag{4e}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (1+2k+2k^2)/(k+k^2) = \frac{2n^2+3n}{1+n} \tag{4f}$$