Zestaw zadań 18

Zadanie 18.1

Zbiór A na płaszczyźnie we współrzędnych kartezjańskich jest określony nierównością:

$$|x| + |y| \leqslant 1. \tag{1}$$

Obliczyć całkę podwójną po zbiorze A:

$$\iint_A (x + y^2)\, dxdy$$

Zadanie 18.2

Zamienić zmienne w całce z poprzedniego zadania, jeżeli nowe zmienne X, Y są dane wzorami:

$$X = x + y \tag{2a}$$

$$Y = x - y \tag{2b}$$

Przy zamianie zmiennych należy pamiętać o obliczeniu *jakobianu* transformacji $(x, y) \to (X, Y)$.

Zadanie 18.3

Obliczyć jakobian transformacji z układu biegunowego do kartezjańskiego:

$$x = r \cos\phi, \tag{3a}$$

$$y = r \sin\phi. \tag{3b}$$

Zadanie 18.4

Obliczyć jakobian transformacji z układu kartezjańskiego do biegunowego:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4a}$$

$$\phi = \arctan(x, y) \tag{4b}$$

Zadanie 18.5

Dane jest pole wektorowe $\vec{V}(x, y, z)$ określone wzorami na składowe $\vec{V} \equiv \{V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z)\}$:

$$\vec{V} = \{y, -x, 0\}. \tag{5}$$

Naszkicuj zadane pole wektorowe dla $z = 0$ na płaszczyźnie x, y, a następnie oblicz jego dywergencję i rotację.

Zadanie 18.6

Oblicz dywergencję wektora wodzącego $\vec{r}$ w dwóch i trzech wymiarach.

Zadanie 18.7

Oblicz gradient pola skalarnego $\phi(\vec{r})$ dla:

$$\phi = \frac{1}{r} \tag{7a}$$

$$\phi = \vec{n} \cdot \vec{r} \tag{7d}$$

$$\phi = xyz \tag{7b}$$

$$\phi = \frac{e^{-r}}{r} \tag{7e}$$

$$\phi = r \tag{7c}$$

$$\phi = xy + xz + yz \tag{7f}$$

Przypominam, że $\vec{r} \equiv \{x, y, z\}$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{n}$ - stały wektor jednostkowy.

Zadanie 18.8

Rozważmy pole wektorowe o składowych:

$$\vec{V} = \{-y/\rho, x/\rho, 0\}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8}$$

Oblicz:

$$\mathbf{rot}\,\vec{V}, \quad \vec{V} \times \mathbf{rot}\,\vec{V}, \quad \mathbf{rot}\left(\vec{V} \times \mathbf{rot}\,\vec{V}\right).$$

Zadanie 18.9

Oblicz w trzech wymiarach:

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) \equiv \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{9}$$