Zestaw zadań 17

Zadanie 16.0

Dokończyć zaległe zadania dotyczące ekstremum warunkowego metodą mnożników Lagrange'a.

Zadanie 16.1

Dane jest pole wektorowe $\vec{V}(x, y, z)$ określone wzorami na składowe $\vec{V} \equiv \{V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z)\}$:

$$\vec{V} = \{y, -x, 0\}. \tag{1}$$

Naszkicuj zadane pole wektorowe dla $z = 0$ na płaszczyźnie x, y, a następnie oblicz jego dywergencję i rotację.

Zadanie 16.2

Oblicz dywergencję wektora wodzącego $\vec{r}$ w dwóch i trzech wymiarach.

Zadanie 16.3

Oblicz gradient pola skalarnego $\phi(\vec{r})$ dla:

$$\phi = \frac{1}{r} \tag{3a}$$

$$\phi = xyz \tag{3b}$$

$$\phi = r \tag{3c}$$

$$\phi = \vec{n} \cdot \vec{r} \tag{3d}$$

$$\phi = \frac{e^{-r}}{r} \tag{3e}$$

$$\phi = xy + xz + yz \tag{3f}$$

Przypominam, że $\vec{r} \equiv \{x, y, z\}$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{n}$ - stały wektor jednostkowy.

Zadanie 16.4

Rozważmy pole wektorowe o składowych:

$$\vec{V} = \{-y/\rho, x/\rho, 0\}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

Oblicz:

$$\mathbf{rot}\, \vec{V}, \quad \vec{V} \times \mathbf{rot}\, \vec{V}, \quad \mathbf{rot}\left(\vec{V} \times \mathbf{rot}\, \vec{V}\right).$$

Zadanie 16.5

Oblicz w trzech wymiarach:

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) \equiv \operatorname{div} \mathbf{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \tag{5}$$