Zestaw zadań 16

Zadanie 16.1

Macierz kwadratowa $\mathcal{M}$ została zdefiniowana wzorem:

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \, \partial q_j}, \tag{1a}$$

gdzie $q = \{x, y, z\}$, $i, j = 1, 2, 3$, a wyrażenie F to:

$$F = x + \frac{1}{y + 1/z}. \tag{1b}$$

Wyznacz elementy macierzy, sprawdź czy jest symetryczna (*dlaczego?*) i podaj jej wyznacznik.

Zadanie 16.2

Zbadaj ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych:

$$f(x, y) = e^{y-x}\,(x^2 + 2y). \tag{2}$$

Zadanie 16.3

Znajdź maksimum lokalne funkcji:

$$F(x, y) = x^2y^2 - x^2y - x^2 - xy^2 + xy + 1. \tag{3}$$

Zadanie 16.4

Dana jest funkcja dwóch zmiennych:

$$F(x, y) = y\,e^{-x}. \tag{4a}$$

Na płaszczyźnie x, y definiujemy krzywą (parabolę) równaniem:

$$y = x^2. \tag{4b}$$

W którym punkcie paraboli funkcja $F(x, y)$ przyjmuje wartości ekstremalne? W celu lepszego zrozumienia zadania, sugeruję rozwiązać je dwoma sposobami:

a) sprowadzając problem do badania funkcji jednej zmiennej,

b) wprowadzając mnożnik Lagrange'a.

Zadanie 16.5

Entropia Shannona dla prawdopodobieństw p_i jest zdefinowana wzorem:

$$S = -\sum_{i=1}^{n} \ln\left(p_i^{p_i}\right) \tag{5a}$$

gdzie n - liczba rozważanych zdarzeń.

Suma wszystkich prawdopodobieństw musi być równa jeden:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{5b}$$

Traktując (5a) jako funkcję n-zmiennych $S = S(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, znaleźć jej maksimum pod warunkiem, że zachodzi (5b). Zadanie rozwiązać dla $n = 2$ i $n = 3$.