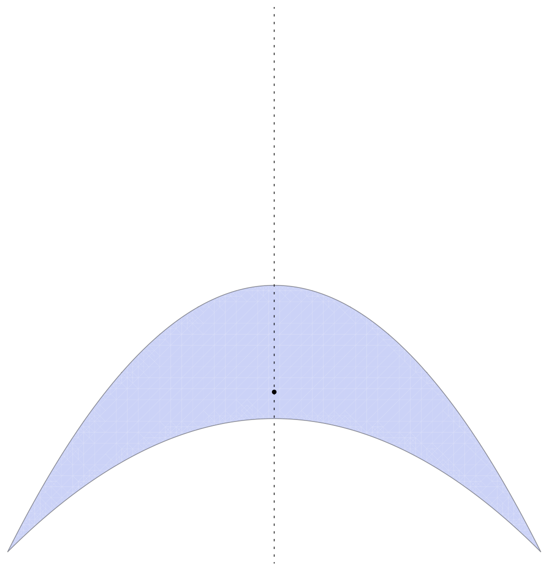
Zestaw zadań 14

Zadanie 14.1

Oblicz pole figury pokazanej na rysunku obok. Zacieniowany obszar jest wyznaczony w układzie współrzędnych kartezjańskich nierównościami:

$$-x^2/2 - 1/2 < y < -x^2. \tag{1}$$



Zadanie 14.2

Znajdź algebraiczny rozkład cylindryczny następujących zbiorów na płaszczyźnie:

$$x^2 + y^2 \leqslant 1 \wedge y > -x \tag{2a}$$

$$|x| + |y| + |xy| \leqslant 1 \tag{2b}$$

$$x^2 + y^2 < 4 \wedge (x-2)^2 + y^2 < 1 \tag{2c}$$

Zadanie 14.3

Łańcuch zawieszony pomiędzy dwoma słupkami odległymi o siebie o 2 metry przyjmuje kształt opisany krzywą łańcuchową:

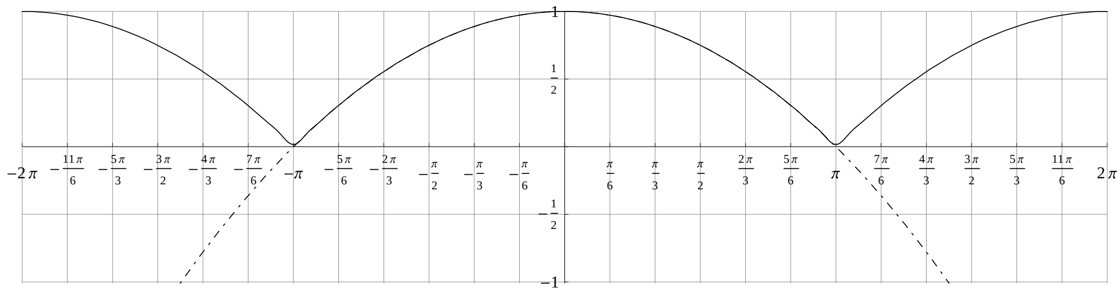
$$y = \cosh x. \tag{3}$$

Oblicz jego długość.

Zadanie 14.4

Znajdź współczynniki rozkładu w szereg Fouriera funkcji okresowej (Rys., linia ciągła), dla której jeden okres $-\pi < x < \pi$ to fragment paraboli (Rys., linia przerywana) o równaniu:

$$y = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}. \tag{4}$$



Rozwiązanie:

Zgodnie z definicją (patrz Wykład 22), rozwinięcie funkcji **okresowej** w szereg Fouriera ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Współczynniki a_n, b_n wyznaczamy następująco:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Wykonujemy obliczenia:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi^3}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}[\pi-(-\pi)] - \frac{1}{\pi^3}\left[\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3}\right)\right] = \frac{2\pi}{\pi} - \frac{1}{\pi^3}\frac{2\pi^3}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Otrzymujemy:

$$a_0 = \frac{4}{3}.$$

Przystępujemy do obliczenia współczynników a_n dla $n \geqslant 1$. Dana jest całka:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx.$$

Obliczamy całki składowe:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left[\sin(n\pi)-\sin(-n\pi)\right] = \frac{1}{n}\left[\sin(n\pi)+\sin(n\pi)\right] = \frac{2}{n}\sin(n\pi).$$

Kolejna całka składowa wymaga zastosowania metody „przez części". Musimy przez różniczkowanie zmniejszyć stopień wielomianu x^2, dlatego *najpierw* całkujemy $\cos nx$. Aby uniknąć bardzo prawdopodobnych w tym przypadku błędów w znakach, obliczam na razie całkę *nieoznaczoną*:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\ \cos nx\,dx = x^2\ \frac{1}{n}\sin nx - \int 2x\ \frac{1}{n}\sin nx\,dx = x^2\ \frac{1}{n}\sin nx - \frac{2}{n}\int x\ \sin nx\,dx.$$

Analogicznie obliczamy $\int x\sin nx dx$:

$$\int x\ \sin nx\,dx = x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right) - \int 1\ \left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\,dx = -\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n}\int\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx.$$

Wstawiamy powyższy wynik do wcześniej otrzymanego wyrażenia i dostajemy *całkę nieoznaczoną*:

$$\int x^2\ \cos nx\,dx = \frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx.$$

Całka oznaczona wynosi:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\ \cos nx\,dx = \frac{1}{n}x^2\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n^2}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^3}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n}\pi^2\sin(n\pi) - \frac{1}{n}(-\pi)^2\sin(-n\pi) + \frac{2}{n^2}\pi\cos(n\pi) - \frac{2}{n^2}(-\pi)\cos(-n\pi) - \frac{2}{n^3}\sin(n\pi) + \frac{2}{n^3}\sin(-n\pi)$$

$$= \frac{2}{n}\pi^2\sin(n\pi) + \frac{4}{n^2}\pi\cos(n\pi) - \frac{4}{n^3}\sin(n\pi).$$

Teraz musimy pozbierać wszystkie wyniki cząstkowe:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{2}{n}\sin(n\pi) - \frac{1}{\pi^3}\left[\frac{2}{n}\pi^2\sin(n\pi) + \frac{4}{n^2}\pi\cos(n\pi) - \frac{4}{n^3}\sin(n\pi)\right]$$

$$a_n = 4\frac{\sin(n\pi)}{n^3\pi^3} - 4\frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2}.$$

To jeszcze nie koniec. Powyższy wzór jest słuszny dla dowolnego n, natomiast nas interesuje przypadek gdy n jest liczbą całkowitą ($n = 1$, $n = 2$, itd.). W takim przypadku wzór na współczynnik a_n znacznie się upraszcza. Po pierwsze, dla całkowitego n mamy:

$$\sin n\pi = 0,$$

oraz:

$$\cos n\pi = (-1)^n.$$

Wszystkie sinusy okazują się być równe zeru, natomiast cosinusy przyjmuja naprzemiennie wartość $+1$ lub -1. Ostatecznie wzór na współczynnik a_n ma postać:

$$a_n = -4\,\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

W zasadzie podobne obliczenia należy wykonać dla współczynnika b_n, ale rzut oka na całkę:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\sin nx\,dx$$

pozwala stwierdzić, że całkujemy funkcję **nieparzystą** po przedziale symetrycznym względem $x = 0$. Wartość całki po przedziale $\{-\pi, 0\}$ jest więc taka sama co do modułu, ale z przeciwnym znakiem, jak całka po przedziale $\{0, \pi\}$. Cała całka wynosi po prostu zero:

$$b_n = 0.$$

Ostateczna odpowiedź jest następująca: *rozwinięciem w szereg Fouriera funkcji $f(x)$ jest:*

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nx).$$

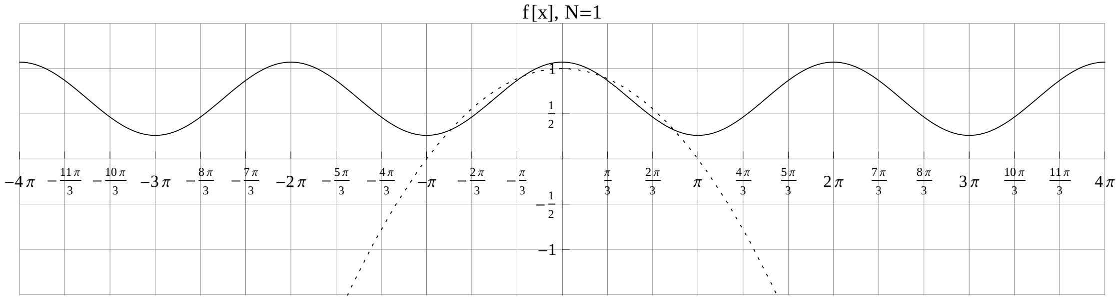
Aby lepiej zrozumieć uzyskany wynik rozpatrzmy kilka pierwszych przybliżeń:

$$f(x) \simeq \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2}\,\cos(nx).$$

Jeżeli obetniemy szereg na $N = 1$, to otrzymamy:

$$f(x) \simeq \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cos x.$$

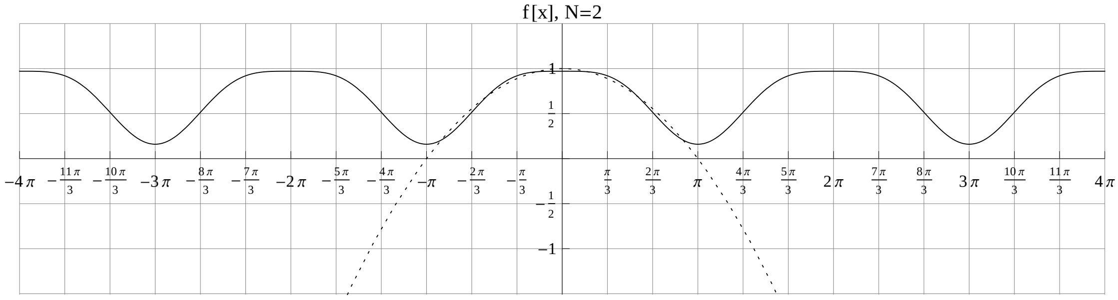
Wykres powyższej funkcji jest następujący:



Dla $N = 2$:

$$f(x) \simeq \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cos x - \frac{1}{\pi^2}\cos 2x.$$

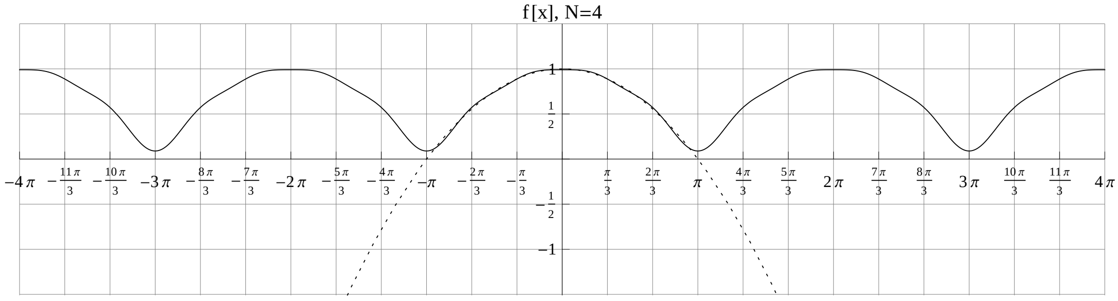
Wykres:



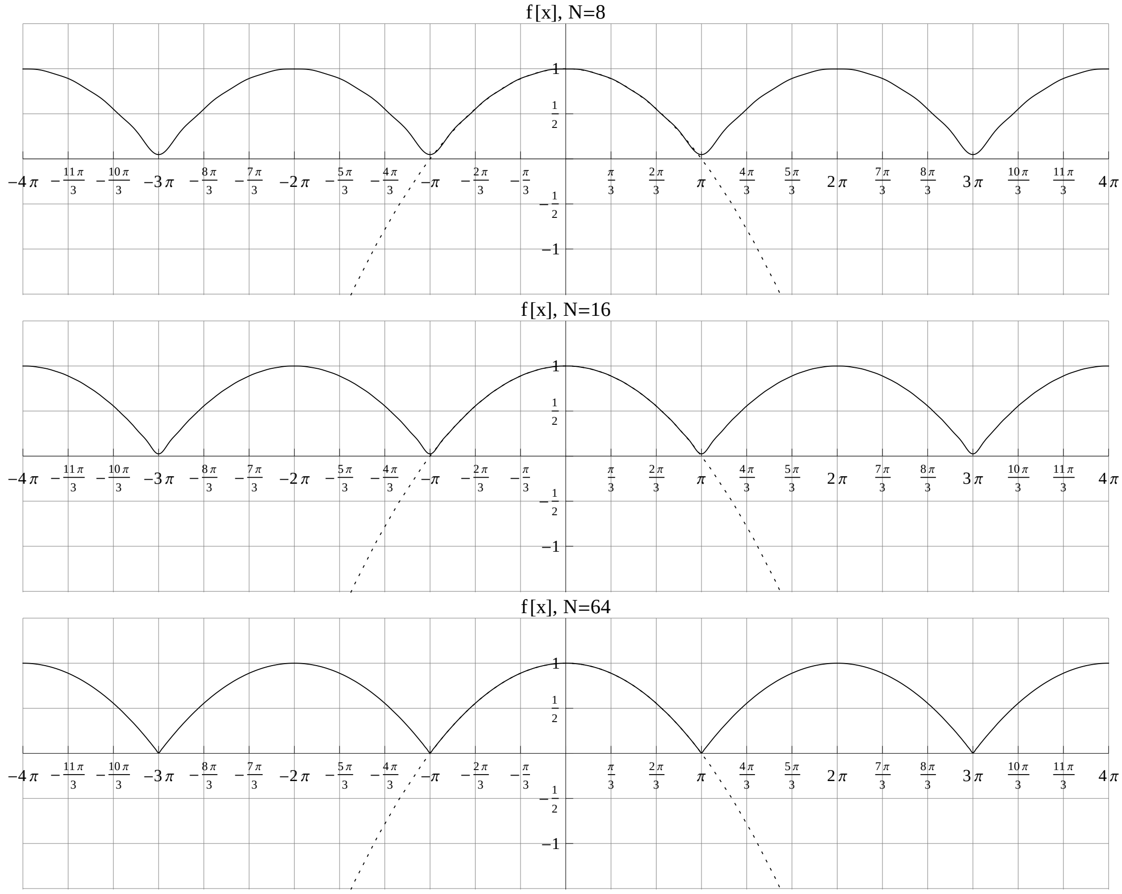
Dla $N = 4$:

$$f(x) \simeq \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cos x - \frac{1}{\pi^2}\cos 2x + \frac{4}{9\pi^2}\cos 3x - \frac{1}{4\pi^2}\cos 4x.$$

Wykres:



I jeszcze kilka wykresów dla większych N:



Zadanie 14.5

Oblicz całki oznaczone:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \tag{5a}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \tag{5b}$$

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x} \tag{5c}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} \tag{5d}$$

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda t), \quad \lambda > 0 \tag{5e}$$

$$\int_0^e \ln x \, dx \tag{5f}$$