Kolokwium I

Zadanie I.1

Udowodnij, że:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \, (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^n \quad \text{(1 pkt)}$$

Rozwiązanie I.1

Dokonujemy ciągu przekształceń:

$$1 = 2 - 1 = (2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} 2^k \, (-1)^k \binom{n}{k} \tag{1a}$$

gdzie wykorzystaliśmy dosyć oczywistą (bo znak nie zmienia się przy obliczaniu odwrotności) zależność:

$$(-1)^{-k} = \frac{1}{(-1)^k} = \frac{1}{(-1)^k} \frac{(-1)^k}{(-1)^k} = \frac{(-1)^k}{\left[(-1)^2\right]^k} = \frac{(-1)^k}{1^k} = (-1)^k. \tag{1b}$$

Po przeniesieniu $(-1)^n$ na drugą stronę w (1a) otrzymujemy zadane wyrażenie. Przypominam, że wyrażenie typu $(-1)^n$, np. w (1b) określa znak:

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & \text{dla } n \text{ parzystego} \\ -1 & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \end{cases} \tag{1c}$$

Zadanie I.2

Udowodnij, że:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1 \quad \text{(1 pkt)}$$

gdzie u_k to wyrazy ciągu Fibonacciego.

Rozwiązanie I.2

Ciąg Fibonacciego jest określony relacją rekurencyjną:

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2}, \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1.$$

Tabelka jego pierwszych wyrazów to:

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	...

Każdy wyraz ciągu Fibonacciego jest sumą dwóch poprzedzających.

Sprawdzamy wzór dla kilku pierwszych wartości n.

Dla $n = 0$ mamy: $L = u_0 = 0$, $P = u_2 - 1 = 1 - 1 = 0$, czyli $L = P$ (lewa strona wzoru równa jest prawej).

Dla $n = 1$ otrzymujemy: $L = u_0 + u_1 = 0 + 1 = 1$, $P = u_3 - 1 = 2 - 1 = 1$.

Dla $n = 2$ dostajemy: $L = u_0 + u_1 + u_2 = 0 + 1 + 1 = 2$, $P = u_4 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Sprawdziliśmy powyżej, że wzór jest prawdziwy dla kilku pierwszych wartości n. Aby udowodnić, że jest prawdziwy dla dowolnego n stosujemy zasadę indukcji.

ZAŁOŻENIE: dla pewnego n prawdziwy jest wzór:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$$

TEZA: wzór jest prawdziwy po zamianie $n \to n + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+3} - 1.$$

DOWÓD: Przekształcamy lewą stronę tezy indukcyjnej:

$$L = \sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = \text{tu wykorzystujemy założenie} = (u_{n+2} - 1) + u_{n+1} = u_{n+3} - 1 = P.$$

Powyżej skorzystaliśmy z definicji ciągu Fibonacciego: wyraz u_{n+3} jest sumą dwóch poprzednich, tj:

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}.$$

Zadanie I.3

Wykaż, posługując się zasadą indukcji matematycznej, że:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{1-k^2} = \frac{2+n-3n^2}{2n(n+1)} \quad \text{(1 pkt)}$$

Rozwiązanie I.3

Sprawdzamy, czy równość zachodzi dla $n = 2$. Lewa strona wzoru to:

$$L = \sum_{k=2}^{2} \frac{2}{1-k^2} = \frac{2}{1-2^2} = -\frac{2}{3}.$$

Prawa strona wynosi:

$$P = \frac{2+2-3\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{4(1-3)}{4\cdot 3} = -\frac{2}{3}.$$

Widać, że lewa strona jest identyczna z prawą ($L = P$), co oznacza, że wzór jest prawdziwy dla $n = 2$.

Analogicznie sprawdzamy dla $n = 3$:

$$L = \sum_{k=2}^{3} \frac{2}{1-k^2} = \frac{2}{1-2^2} + \frac{2}{1-3^2} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{8} = -\frac{11}{12},$$

$$P = \frac{2+3-3\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{11}{12},$$

a więc $L = P$.

Założenie indukcyjne:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{1-k^2} = \frac{2+n-3n^2}{2n(n+1)} \quad \text{dla pewnego } n.$$

Teza:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{1-k^2} = \frac{2+(n+1)-3(n+1)^2}{2(n+1)(n+2)} = -\frac{5n+3n^2}{2(n+1)(n+2)}.$$

Prawa strona tezy została już uproszczona aby ułatwić dowód.

Dowód (przekształcamy lewą stronę tezy, tak aby skorzystać z założenia indukcyjnego i otrzymać prawą stronę tezy):

$$L = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{1-k^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{1-k^2} + \frac{2}{1-(n+1)^2} = \frac{2+n-3n^2}{2n(n+1)} + \frac{2}{1-(n+1)^2} =$$

$$= \frac{2+n-3n^2}{2n(n+1)} + \frac{2}{1-n^2-2n-1} = \frac{2+n-3n^2}{2n(n+1)} + \frac{2}{-n^2-2n} = \frac{2+n-3n^2}{2n(n+1)} - \frac{2}{n(n-2)} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{2+n-3n^2}{2n+2} - \frac{2}{n+2}\right] = \frac{1}{n}\frac{-n(5n+3n^2)}{2(n+1)(n+2)} = -\frac{5n+3n^2}{2(n+1)(n+2)} = P.$$

Zadanie I.4

Podaj definicję poniższego wyrażenia w języku logiki matematycznej:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad (1\ \text{pkt})$$

Odpowiedź I.4

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = A\right) \Leftrightarrow \left(\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N>0}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall} |a_n - A| < \epsilon\right)$$

Zadanie I.5

Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n} \quad \text{(1 pkt)}$$

Rozwiązanie I.5

Zauważamy, że zachodzą oszacowania:

$$\sqrt[n]{2^n} < \sqrt[n]{1+2^n} < \sqrt[n]{2^n+2^n}. \tag{4}$$

Granica lewej strony w (4) to oczywiście:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Granica prawej strony oszacowania (4) to:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot 2 = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 2,$$

bo granica pierwiastka n-tego stopnia z dowolnej liczby większej od zera jest równa jeden.

Skoro granica lewego (dolnego) oszacowania w (4) równa 2, i granica prawego (górnego) oszacowania także jest równa 2, na podstawie *twierdzenia o trzech ciągach* wnioskujemy, że:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+2^n} = 2.$$

Zadanie I.6

Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} (1-1/n)^{-n/2} \quad \text{(1 pkt)}$$

Rozwiązanie I.6

Wiadomo, np. z Wykładu 5, że:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Przekształcamy wyrażenie pod granicą:

$$(1-1/n)^{-n/2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}}.$$

Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e}}} = \sqrt{e}.$$

Odpowiedź końcowa to:

$$\lim_{n\to\infty} (1-1/n)^{-n/2} = \sqrt{e}.$$

Zadanie I.7

Oblicz granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2n+1}{n}}{\binom{2n}{n-1}} \quad \text{(1 pkt)}$$

Rozwiązanie I.7

Przypominam, że symbol dwumienny (Newtona) definiujemy jako:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Upraszczamy wyrażenie pod granicą:

$$\frac{\binom{2n+1}{n}}{\binom{2n}{n-1}} = \frac{(2n+1)!}{n!(2n+1-n)!}\,\frac{(n-1)![2n-(n-1)]!}{(2n)!} = \frac{(2n)!(2n+1)}{n!(n+1)!}\,\frac{(n-1)!(n+1)!}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(n-1)!}{n!}$$

$$= \frac{(2n+1)(n-1)!}{(n-1)!n} = \frac{2n+1}{n-1}.$$

Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Powyżej wykorzystaliśmy granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Zadanie I.8

Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{3k/2}k!}{k^k} \quad \text{(1 pkt)}$$

Rozwiązanie I.8

Wykorzystuję ilorazowe kryterium zbieżności (d'Alemberta).
Obliczam:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2^{3(k+1)/2}(k+1)!}{(k+1)^{(k+1)}}}{\frac{2^{3k/2}k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{\frac{3k}{2}+\frac{3}{2}}k!(k+1)}{(k+1)^k(k+1)}\,\frac{k^k}{k!2^{\frac{3k}{2}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{\frac{3}{2}}k^k}{(k+1)^k} =$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \sqrt{2^3} \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{(k+1)/k}\right)^k = 2\sqrt{2} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{2\sqrt{2}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{2\sqrt{2}}{e}.$$

Ponieważ $\sqrt{2} \simeq 1.4$ a $e \simeq 2.7$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\sqrt{2}}{e} > 1,$$

i na mocy kryterium ilorazowego szereg jest rozbieżny.

Zadanie I.9

Oblicz sumę:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2-1} \quad \text{(1 pkt)}$$

Rozwiązanie I.9

SPOSÓB I:
Wyrażenie od sumą rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{4}{n^2-1} = \frac{4}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+B(n-1)}{n^2-1} = \frac{An+A+Bn-B}{n^2-1} = \frac{(A+B)n+A-B}{n^2-1}.$$

Przyrównanie współczynników przy takich samych potęgach n po lewej i prawej stroniedaje nam:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=4. \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy $2A=4$ czyli $A=2$, i podstawiając do pierwszego równania otrzymujemy $B=-2$. Ostatecznie, rozkład na ułamki proste ma postać:

$$\frac{4}{n^2-1} = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+1}.$$

Obliczamy ciąg sum częściowych szeregu (czyli sumujemy do pewnego N):

$$s_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{4}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+1} = \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n+1} = 2\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - 2\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1}.$$

Przekształcamy otrzymane sumy następująco. W sumie poniżej postawiamy $n-1=k$, co daje:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k},$$

gdzie granice sumowania także zostały zmienione o 1 (suma została „przenumerowana”). Dla drugiego składnika analogicznie mamy, podstawiając $n+1=k$:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=3}^{N+1} \frac{1}{k}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$s_N = 2\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=3}^{N+1} \frac{1}{k} == 2\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=3}^{N-1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=3}^{N-1} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=N}^{N+1} \frac{1}{k}.$$

Drugi i trzeci składnik upraszczają się, i otrzymujemy:

$$s_N = 2\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=N}^{N+1} \frac{1}{k} = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right) = 3 - \frac{2}{N} - \frac{1}{N+1}.$$

Obliczamy granicę ciągu sum częściowych w nieskończoności:

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}\left(3 - \frac{2}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \lim_{N\to\infty} 3 - \lim_{N\to\infty}\frac{2}{N} - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1} = 3 - 0 - 0 = 3.$$

Odpowiedź:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n^2-1} = 3.$$

SPOSÓB II:
Wykorzystamy wynik udowodniony w Zadaniu I.3.
Obliczamy ciąg sum częściowych:

$$s_N = \sum_{n=2}^{N}\frac{4}{n^2-1} = -2\sum_{k=2}^{N}\frac{2}{1-k^2} = -2\left[\frac{2+N-3N^2}{2N(N+1)}\right] = 2\frac{3N^2-N-2}{2N^2+2N}.$$

Jego granica w nieskończoności to:

$$\lim_{N\to\infty} 2\frac{3N^2-N-2}{2N^2+2N)} = 2\lim_{N\to\infty}\frac{3N^2-N-2}{2N^2+2N} = 2\cdot\frac{3}{2} = 3.$$

Zadanie I.10

Podaj definicję i przykład szeregu warunkowo zbieżnego. Co spowoduje zmiana kolejności wyrazów w takim szeregu? (1 pkt)

Odpowiedź I.10

Szereg warunkowo zbieżny, to taki, który jest zbieżny, ale nie jest *bezwzględnie zbieżny*. Przykład takiego szeregu to:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2$$

natomiast szereg wartości bezwzględnych:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = +\infty.$$

Można pokazać (Wykład 7, Tw. 7.6), że w takim szeregu nie wolno dokonywać zmian kolejności sumowania. Jeżeli dokonamy zmian, suma szeregu może okazać się inna, w tym nieskończona. Co więcej, można poprzez zmianę kolejności sumowania otrzymać szereg zbieżny do dowolnej wybranej z góry liczby. Szeregi bezwzględnie zbieżne nie posiadają takich „patologicznych" własności: ich suma nie zależy od kolejności składników.