

KOŁOKWIUM I

- Ilość zadań: 10
- Możliwa do uzyskania ilość punktów: 10
- Czas trwania : 90 minut
- Kolejność rozwiązywania zadań: dowolna
- Zasady punktacji: 1 pkt za poprawnie rozwiązane zadanie; 0.5 pkt za rozwiązanie częściowe lub zawierające drobne błędy; 0 pkt za rozwiązanie fałszywe, zawierające poważne błędy, lub brak rozwiązania
- kategoryczny zakaz używania notatek, gotowych przykładów rozwiązania, podręczników, tablic, telefonów komórkowych, tabletów itp.

Zadanie I.1

Udowodnij, że:

$$\sum_{k=0}^n 2^k (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^n \quad (1 \text{ pkt})$$

Zadanie I.2

Udowodnij, że:

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_{n+2} - 1 \quad (1 \text{ pkt})$$

gdzie u_k to wyrazy ciągu Fibonacciego (przyjmujemy $u_0 = 0, u_1 = 1$).

Zadanie I.3

Wykaż, posługując się zasadą indukcji matematycznej, że:

$$\sum_{k=2}^n \frac{2}{1-k^2} = \frac{2+n-3n^2}{2n(n+1)} \quad (1 \text{ pkt})$$

Zadanie I.4

Podaj definicję poniższego wyrażenia w języku logiki matematycznej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad (1 \text{ pkt})$$

Zadanie I.5

Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n} \quad (1 \text{ pkt})$$

Zadanie I.6

Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/n)^{-n/2} \quad (1 \text{ pkt})$$

Zadanie I.7

Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n+1}{n}}{\binom{2n}{n-1}} \quad (1 \text{ pkt})$$

Zadanie I.8

Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{3k/2}}{k^k} k! \quad (1 \text{ pkt})$$

Zadanie I.9

Oblicz sumę:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 1} \quad (1 \text{ pkt})$$

Zadanie I.10

Podaj definicję i przykład szeregu warunkowo zbieżnego. Co spowoduje zmiana kolejności wyrazów w takim szeregu? (1 pkt)