Zestaw zadań 2: niektóre odpowiedzi

Zadanie 2.1

Zakładając, że odległość wynosi 1200 km a rok ma 365.25 dni, szybkość ślimaka v to:

$$v = 120\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{rok}} = 13.7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}} = 3.8\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}.$$

Jednostki skutecznie przelicza wyszukiwarka Google.

Zadanie 2.2

Oznaczając szybkość studentki przez v_1, a szybkość studenta przez v_2 otrzymujemy:

$$v_1 = 5.56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad v_2 = 7.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

czyli $v_2 > v_1$: student jest szybszy.

Zadanie 2.3

Samochód porusza się z szybkością 20 m/s.

Zadanie 2.4

Oznaczając przez x odległość od miejsca postoju patrolu do miejsca złapania, a przez t czas od momentu minięcia patrolu do złapania, otrzymujemy:

$$x = \frac{5}{3}\,\mathrm{km} \simeq 1667\ \mathrm{m}, \qquad t = 50\ \mathrm{s}.$$

Zadanie 2.4a

Wybierając układ współrzędnych (czas t oraz położenie x) jak w zadaniu 2.4, położenie pojazdu 1 (uciekający) w chwili t można zapisać (ruch jednostajny) jako:

$$x = v_1 t.$$

Analogicznie, położenie pojazdu 2 (policja) zapisujemy jako:

$$x = v_2(t - \Delta t),$$

gdzie Δt to opóźnienie (w chwili $t = \Delta t$ policja nadal stoi w $x = 0$).

Powyższe dwa wzory tworzą układ rownań liniowych na niewiadome x, t:

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ x = v_2(t - \Delta t). \end{cases}$$

Jego rozwiązanie to:

$$\begin{cases} t = \frac{v_2 \Delta t}{v_2 - v_1} \equiv \Delta t + \frac{v_1 \Delta t}{v_2 - v_1} \\ x = \frac{v_1 v_2 \Delta t}{v_2 - v_1}. \end{cases}$$

Zadanie 2.5

Prędkość jest pochodną (w sensie matematycznym) położenia po czasie:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2\right) = \frac{d}{dt}x_0 + \frac{d}{dt}v_0(t-t_0) + \frac{d}{dt}(t-t_0)^2 =$$

$$= 0 + v_0\frac{d}{dt}(t-t_0) + \frac{1}{2}a_0\frac{d}{dt}(t^2 - 2tt_0 + t_0^2) == v_0 + \frac{1}{2}a_0(2t-2t_0) = v_0 + a_0(t-t_0).$$

Analogicznie, przyspieszenie jest pochodną prędkości:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left(v_0 + a_0(t-t_0)\right) = a_0.$$

Zadanie 2.6

Po dwóch prostopadłych ulicach poruszają się z identyczną szybkością v dwa samochody. Pierszy mija skrzyżowanie w chwili t_1, drugi w chwili t_2. Kiedy odległość pomiędzy nimi będzie najmniejsza? Ile wynosi?

Położenie na jednej z ulic oznaczamy przez x, na drugiej (prostopadłej) przez y. Wektor położenia samochodu 1, poruszającego się po osi Ox, ma współrzędne $\vec{r} = \{x, y\}$:

$$\vec{r_1} = \{v(t-t_1), 0\},$$

a drugiego:

$$\vec{r_2} = \{0, v(t-t_2)\}.$$

Położenie $\vec{\Delta r}$ pojazdu 1 względem pojazdu 2 to różnica wektorów:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \{0, v(t-t_2)\} - \{v(t-t_1), 0\} = \{-v(t-t_1), v(t-t_2)\}.$$

Odległość d w chwili t pomiędzy pojazdami to długość wektora $\vec{\Delta r}$:

$$d(t) = |\vec{\Delta r}| = \sqrt{[-v(t-t_1)]^2 + [v(t-t_2)]^2} = v\sqrt{(t-t_1)^2 + (t-t_2)^2}.$$

Najmniejszą wartość $d(t)$ znajdujemy szukając miejsca zerowego pochodnej: $d'(t) = 0$. W tym konkretnym przypadku można jednak otrzymać wynik bez pochodnych. Otóż pod pierwiastkiem znajduje się funkcja kwadratowa:

$$(t-t_1)^2 + (t-t_2)^2 = 2t^2 - 2(t_1+t_2)t + t_1^2 + t_2^2 \equiv at^2 + bt + c,$$

gdzie:

$$a = 2, \qquad b = -2(t_1+t_2), \qquad c = t_1^2 + t_2^2.$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$\{-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\} = \{\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{(t_1-t_2)^2}{2}\}.$$

Wierzchołek paraboli to minimum funkcji kwadratowej.

Odpowiedź: $t = \frac{t_1+t_2}{2}$, $\quad d = v\sqrt{\frac{(t_1-t_2)^2}{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}}|t_1 - t_2|$.

Zadanie 2.7

PATRZ odpowiedź do podobnego Zad. 1.8.