Zestaw zadań 1: niektóre odpowiedzi

Zadanie 1.1

Dane są wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ o współrzędnych:

$$\vec{u} = \{-1, 1\}, \quad \vec{v} = \{-2, -2\}, \quad \vec{w} = \{0, 3\}.$$

Oblicz:

$$\vec{u} + \vec{w} = \{-1, 4\}, \tag{1a}$$
$$-\vec{u} - \vec{v} = \{3, 1\}, \tag{1b}$$
$$\vec{u} + 2\vec{w} - \vec{v} = \{1, 9\}, \tag{1c}$$
$$\vec{u} - 2(\vec{u} + 3\vec{w}) = \{1, -19\}, \tag{1d}$$
$$2\vec{w} - (2\vec{u} - \vec{v}) = \{0, 2\}, \tag{1e}$$
$$-\vec{u} + [\vec{v} + (2\vec{u} + 2\vec{v})] = \{-7, -5\}. \tag{1f}$$

Przedstaw interpretację geometryczną powyższych działań algebraicznych w postaci strzałek na płaszczyźnie.

Zadanie 1.2

Dane są wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o współrzędnych:

$$\vec{a} = \{2, 2, -1\}, \quad \vec{b} = \{0, 3, 0\}, \quad \vec{c} = \{2, 0, 0\}.$$

Oblicz:

$$\vec{a} - \vec{b} = \{2, -1, -1\}, \tag{2a}$$
$$-2\vec{a} - 2\vec{c} = \{-8, -4, 2\}, \tag{2b}$$
$$3\vec{c} + \vec{b} - \vec{a} = \{4, 1, 1\}, \tag{2c}$$
$$\vec{a} - 3(\vec{a} + 2\vec{b}) = \{-4, -22, 2\}, \tag{2d}$$
$$3\vec{b} - (\vec{a} - \vec{c}) = \{0, 7, 1\}, \tag{2e}$$
$$-2\vec{a} + \left[\vec{c} + (-\vec{b} + \vec{a})\right] = \{0, -5, 1\}. \tag{2f}$$

Zadanie 1.3

Oblicz iloczyn skalarny i wektorowy, kąt pomiędzy wektorami oraz długości wektorów:

$$\vec{u} = \{3, 4, 2\}, \qquad \vec{v} = \{-1, 0, -2\}. \tag{3}$$

ODP: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -7$, $\vec{u} \times \vec{v} = \{-8, 4, 4\}$, $u = \sqrt{29}$, $v = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = -7/\sqrt{145}, \alpha = 125.543°$

Zadanie 1.4

Znajdź na płaszczyźnie jednostkowy wektor prostopadły do wektora $\vec{a}$ o współrzędnych:

$$\vec{a} = \{-4, 3\}.$$

ODP: $\{3/5, 4/5\}$ lub $\{-3/5, -4/5\}$.

Zadanie 1.5

Dane są współrzędne wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1, 0, -1\}, \quad \mathbf{b} = \{1, 0, 1\}, \quad \mathbf{c} = \{1, -1, 0\}.$$

Oblicz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \tag{5a}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \tag{5b}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c}, \tag{5c}$$
$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \tag{5d}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 1 \tag{5e}$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\,, \tag{5f}$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \tag{5g}$$
$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}, \tag{5h}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \tag{5i}$$
$$\mathbf{0} + \mathbf{a}, \tag{5j}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{5k}$$
$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \tag{5l}$$
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{0}, \tag{5m}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\, \mathbf{c}, \tag{5n}$$
$$\mathbf{cba}, \tag{5o}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{a}. \tag{5p}$$

Zadanie 1.6

Oblicz dla dowlonych wektorów $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ oraz $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 3\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \tag{6a}$$

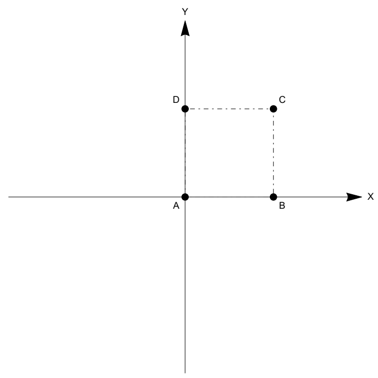
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{6b}$$

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})] \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] - 3\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2, \tag{6c}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \tag{6d}$$

Zadanie 1.7

Kwadrat o boku a umieszczono w układzie współrzędnych kartezjańskich w sposób pokazany obok. Podać wspórzędne kartezjańskie i biegunowe wierzchołków. ODP:
kartezjańskie: $A = (0,0), B = (a,0), C = a, a, D0, a$;
biegunowe: $A = (0, ?), B = (a, 0), C = (a\sqrt{2}, \pi/4), D = (a, \pi/2)$.



Zadanie 1.8

Wektor $\mathbf{r}(t)$ położenia punktu materialnego w zależności od czasu opisano wzorami:

$$\mathbf{r} = \{\cos\omega t, \sin\omega t, \omega t\}.$$

Obliczyć prędkość:
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \omega\{-\sin\omega t, \cos\omega t, 1\}$,
przyspieszenie $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -\omega^2\{\cos\omega t, \sin\omega t, 0\}$
ich długości $r = \sqrt{t^2\omega^2 + 1}$,
$v = \sqrt{2}\omega$,
$a = \omega^2$
$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \omega^2 t$,
$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -\omega^2$,
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$,
$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \{\omega\sin(\omega t) - t\omega^2\cos(\omega t), -t\omega^2\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t), \omega\}$,
$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \omega^3\,\{t\sin(\omega t), -t\cos(\omega t), 0\}$,
$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \omega^3\,\{\sin(\omega t), -\cos(\omega t), 1\}$.