Zadanie 1

Dane są wektory:

$$\vec{a} = \left\{0, 3, \frac{1}{2}\right\}, \qquad \vec{b} = \{0, 1, -3/2\}, \qquad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \{-5, 0, 0\}.$$

Oblicz:

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \{5, 4, -1\} \tag{1a}$$

$$1/\sqrt{2}\vec{c} = \left\{-\frac{5\sqrt{2}}{4}, 0, 0\right\} \tag{1b}$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \left\{0, \frac{11}{6}, -\frac{1}{4}\right\} \tag{1c}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \left\{-\frac{45}{4}, 0, 0\right\} = \{-11.25, 0.0, 0.0\} \tag{1d}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b} = 9/4 = 2.25 \tag{1e}$$

$$\sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}} = 5 \tag{1f}$$

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} = 4.84416 \tag{1g}$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{9}{\sqrt{481}}, \quad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 65.8^\circ \tag{1h}$$

$$\angle(\vec{c}, \vec{b}) = \pi/2 = 90^\circ \tag{1i}$$

$$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left\{0, \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right\} \tag{1j}$$

$$\text{rzut } \vec{a} \text{ na } \vec{c}: \quad \{0, 0, 0\} \tag{1k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 25 \tag{1l}$$

Zadanie 2

Położenie $x(t)$ punktu materialnego na prostej Ox w chwili t wyznacza wzór:

$$x(t) = 2v_0\,(t - t_0) + v_0\,\sqrt{t\,t_0},$$

gdzie t_0 i v_0 to pewne stałe o wymiarze odpowiednio czasu i prędkości. Obliczyć zależności prędkości $v(t)$ i przyspieszenia $a(t)$ od czasu. Podać wzory na x, v, a dla czasu $t = 4t_0$. Wyliczyć wartości $x(t_0), v(t_0), a(t_0)$ dla $t_0 = 5s$ i $v_0 = 36$ km/h.

ODP:

$$v(t) = \frac{v_0}{2}\left(4 + \sqrt{\frac{t_0}{t}}\right)$$

$$a(t) = -\frac{v_0}{4t}\sqrt{\frac{t_0}{t}}$$

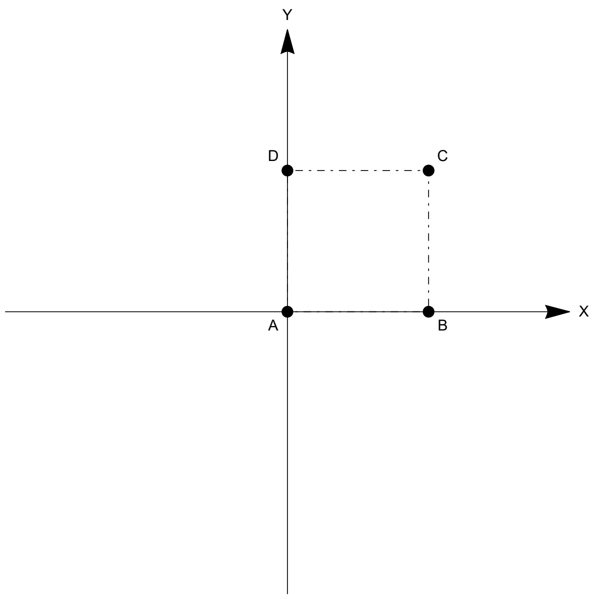
$$x(4t_0) = 8\,v_0 t_0, \quad v(4t_0) = \frac{9}{4}\,v_0, \quad a(4t_0) = -\frac{1}{32}\frac{v_0}{t_0}.$$

Dla $t_0 = 5$ s oraz $v_0 = 10$ m/s:

$$x(t_0) = 50 \text{ m}, \quad v(t_0) = 25 \text{ m/s}, \quad a(t_0) = -0.5 \text{ m/s}^2.$$

Zadanie 3

Kwadrat o boku a w chwili $t = 0$ umieszczono w układzie współrzędnych kartezjańskich w sposób pokazany obok. Kwadrat obraca się ze stałą prędkością kątową ω w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara dookoła punktu A. Podać współrzędne kartezjańskie i biegunowe wierzchołków A, B, C, D w chwili $t > 0$. Przecięcie osi X, Y (punkt A) znajduje się w początku układu współrzędnych. Dla wybranego wierzchołka obliczyć prędkość $\mathbf{v}$ i przyspieszenie $\mathbf{a}$.



Współrzędne biegunowe (r, ϕ):

$$A = (0, ?), B = (a, -\omega t), C = (a\sqrt{2}, -\omega t + \pi/4), D = (a, -\omega t + \pi/2).$$

Współrzędne kartezjańskie (x, y):

$$\mathbf{r}_A = (0, 0),$$
$$\mathbf{r}_B = (a \cos \omega t, -a \sin \omega t),$$
$$\mathbf{r}_C = (a\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4), a\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)),$$
$$\mathbf{r}_D = (a \sin \omega t, a \cos \omega t).$$

Najprościej zadanie rozwiązać zaczynając od wsp. biegunowych, a następnie użyć wzorów $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$.

Prędkości i przyspieszania są odpowiednio pierwszą i drugą pochodną wektora położenia (współrzędnych kartezjańskich):

wierzchołek A:

$$\mathbf{v}_A = \{0, 0\}, \mathbf{a}_A = \{0, 0\},$$

wierzchołek B:

$$\mathbf{v}_B = a\omega\{-\sin\omega t, -\cos\omega t\}, \qquad \mathbf{a}_B = -a\omega^2\mathbf{r}_B,$$

wierzchołek C:

$$\mathbf{v}_C = a\omega\sqrt{2}\{\cos(\omega t + \pi/4), -\sin(\omega t + \pi/4)\}, \qquad \mathbf{a}_C = -a\sqrt{2}\omega^2\mathbf{r}_C,$$

wierzchołek D:

$$\mathbf{v}_D = a\omega\{\cos\omega t, -\sin\omega t\}, \qquad \mathbf{a}_D = -a\omega^2\mathbf{r}_D.$$