Zadanie 1.

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-\dot{x}^2} + mgx$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = mg$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -m\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\sqrt{1-\dot{x}^2}\right) = -m\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = -m\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\dot{x}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\dot{x}\right) = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = m\ddot{x}\left(1-\dot{x}^2\right)^{-\frac{1}{2}} + m\dot{x}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\dot{x}^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{dt}\left(1-\dot{x}^2\right) = \frac{m\ddot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} + \frac{m\dot{x}^2\ddot{x}}{\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{m\ddot{x}\left(1-\dot{x}^2\right) + m\dot{x}^2\ddot{x}}{\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m\ddot{x} - m\ddot{x}\dot{x}^2 + m\ddot{x}\dot{x}^2}{\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m\ddot{x}}{\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Równanie Lagrange-Eulera:

$$m\left(\frac{\ddot{x}}{\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{3}{2}}} - g\right) = 0.$$

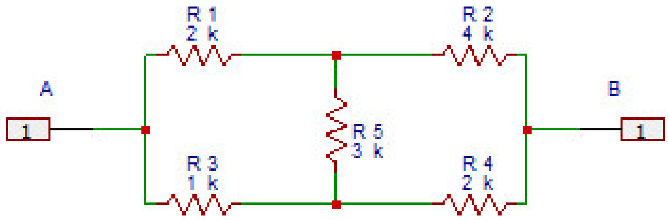
Skracamy m i przenosimy g na drugą stronę:

$$\frac{\ddot{x}}{\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = g.$$

Rozwiązanie z warunkami początkowymi $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 0$ (Mathematica):

$$x(t) \to \frac{-1+\sqrt{1+g^2t^2}}{g}.$$

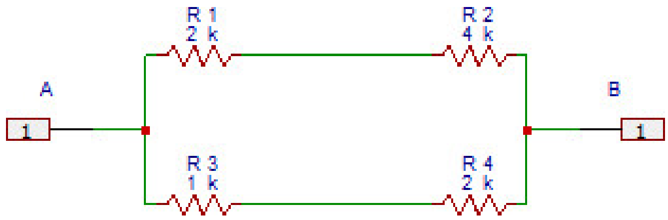
Zadanie 2.



Podany w zadaniu obwód można sprowadzić do układu mostka, który spełnia warunek równowagi, tj.:

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_1.$$

Gwarantuje nam to, że przez rezystor R_5 nie płynie prąd zatem możemy go wyłączyć z układu tak jak na podanym poniżej schemacie.



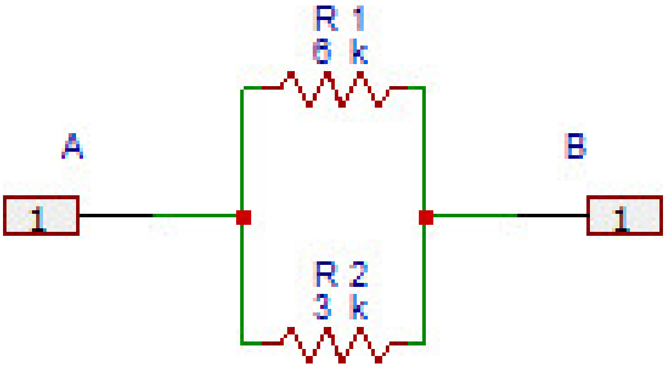
Obliczamy rezystancję zastępczą:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{2k\Omega + 4k\Omega} + \frac{1}{1k\Omega + 2k\Omega} = \frac{1}{6k\Omega} + \frac{1}{3k\Omega} = \frac{1}{2k\Omega}$$

$$R_z = 2k\Omega$$

$$I = \frac{6V}{2k\Omega} = 3 * 10^{-3}A = 3mA$$

Z pierwszego prawa Kirchhoffa: suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie prądów wypływających z węzła.



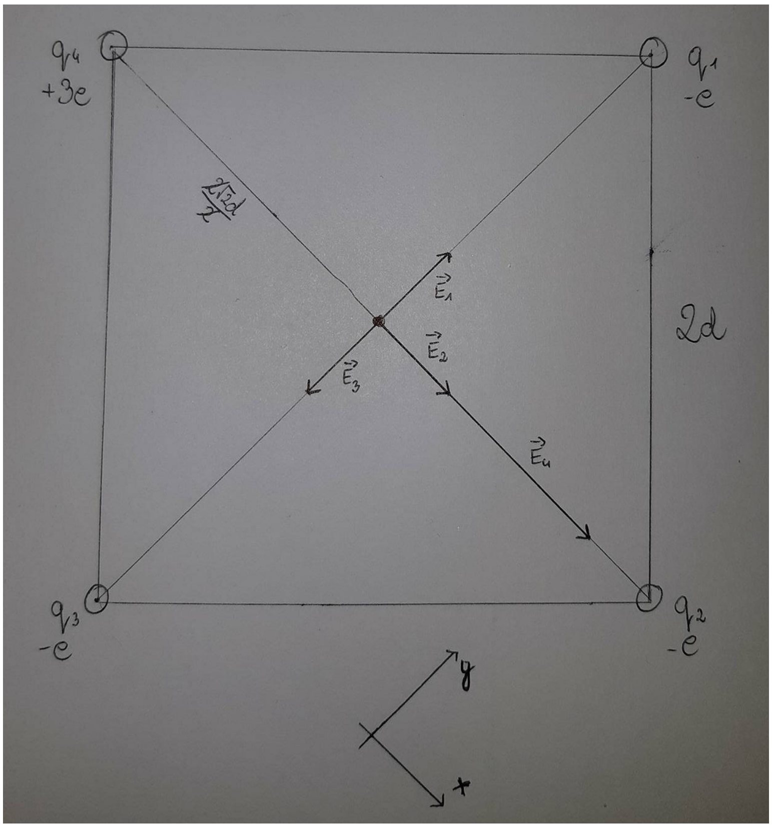
$$I = I_1 + I_2$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa: w zamkniętym obwodzie suma spadków napięć na oporach równa jest sumie sił elektromotorycznych występujących w tym obwodzie.

$$U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2$$
$$I_2 = \frac{I_1 R_1}{R_2}$$
$$I = I_1 + \frac{I_1 R_1}{R_2}$$
$$I = I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = I_1 (1 + 2) = 3I_1$$
$$I_1 = \frac{I}{3} = 1 * 10^{-3} A = 1mA$$
$$I_2 = 2 * 10^{-3} A = 2mA$$

I_1 *- prąd płynący przez rezystor* R_1
I_2 *- prąd płynący przez rezystor* R_2

Zadanie 3.



"Natężenie pola elektrycznego jest równe sile działającej na jednostkowy dodatni ładunek próbny, co matematycznie wyraża się jako stosunek siły $\vec{F}$, z jaką pole elektryczne działa na ładunek elektryczny, do wartości q tego ładunku."

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Inaczej:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0^+} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Z zasady superpozycji:

$$\vec{E_c} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i}$$

W naszym przypadku:

$$\vec{E_c} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + \vec{E_4}$$

Widzimy, że $\vec{E_1} = -\vec{E_3}$, dlatego

$$\vec{E_c} = \vec{E_2} + \vec{E_4}$$

$$E_2 = \frac{ke}{2d^2} \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$E_2 = \frac{3ke}{2d^2} \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$E_c = \frac{k}{2d^2}(e + 3e) = \frac{2ke}{d^2} \left[\frac{V}{m}\right]$$

Po wprowadzeniu układu współrzędnych (taki jak jest oznaczony na rysunku) wektor pola elektrycznego przyjmuje postać

$$\vec{E} = \left\{\frac{2ke}{d^2}, 0\right\} \left[\frac{V}{m}\right], \qquad \text{gdzie } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}$$

Natężenie pola elektrycznego jest równe długości wektora natężenia, czyli $\frac{2ke}{d^2}\left[\frac{V}{m}\right]$.

Potencjał elektryczny zależy od wielkości ładunku źródłowego i odległości między ładunkiem źródłowym a danym punktem pola. W naszym przypadku pole elektryczne wytwarzane jest przez kilka ładunków dlatego

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$U_1 = k\frac{-e}{\sqrt{2}d} [V]$$

$$U_2 = k\frac{-e}{\sqrt{2}d} [V]$$

$$U_3 = k\frac{-e}{\sqrt{2}d} [V]$$

$$U_4 = k\frac{3e}{\sqrt{2}d} [V]$$

$$U = 0 [V]$$