Zadanie 2

Porównać wartość siły przyciągania grawitacyjnego pomiędzy Ziemią a Słońcem oraz pomiędzy Księżycem a Słońcem. Wartości liczbowe: stała grawitacyjna $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2 \mathrm{kg}}$, masa Słońca $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg, masa Ziemi $M_\oplus \simeq 6 \times 10^{24}$ kg, masa Księżyca 1/80 $M_\oplus$, odległość Ziemia-Słońce 150 mln km, odległość Ziemia-Księżyc 400 tyś. km.

Rozwiązanie

Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadania należy starannie przeczytać jego treść. Podane w treści symbole należy zachować, czyli $M_\odot$ a nie np: $M_{\text{Sł.}}$ na masę Słońca itp. O ile używanie powszechnie akceptowanych symboli nie jest warunkiem uzyskania poprawnej odpowiedzi, to jest warunkiem możliwości odczytania i zrozumienia rozwiązania przez inne osoby. Podane liczby należy przeliczyć na jeden układ jednostek, zwykle SI. Rachunek należy prowadzić na symbolach, nie wartościach numerycznych, tak długo jak to możliwe.

Zanim zaczniemy cokolwiek liczyć, należy przypomnieć sobie kluczowe wzory (prawa fizyki). Pomyłka dyskfalifikuje rezultat. Prawo powszechnego ciążenia Newtona (czasem IV zasada dynamiki) to:

$$F_g = G\,\frac{M_1 M_2}{r^2}, \qquad \text{gdzie:}$$

F_g - wartość (długość) wektora siły przyciągającej ciała o masach M_1 i M_2, znajdujące się w odległości r od siebie. Pomyłki typu $F_g = G\frac{M_1+M_2}{r^2}$, $F_g = G\frac{M_1 M_2}{r}$, $F_g = G\frac{M_1 M_2}{(M_1+M_2)r^2}$ można łatwo odrzucić obliczając jednostki:

$$[F_g] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2\mathrm{kg}}\frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}.$$

Musi wyjść jednosta siły, N - Newton. Przypadek błędnego wzoru od razu się ujawni.

Kolejna typowa pomyłka to użycie wzoru:

$$F_g = m\,g.$$

Niestety, wzór ten obowiązuje **wyłącznie** na powierzchni Ziemi, w przeciwnieństwie do prawa powszechnego ciążenia, obowiązującego w całym Wszechświecie. Z niego wynika przypadek szczególny:

$$F_g = G\,\frac{M_\oplus m}{R_\oplus^2} = mg, \text{ gdzie } g = \frac{G M_\oplus}{R_\oplus^2}.$$

$R_\oplus, M_\oplus$ to promień i masa Ziemi. Na każdej planecie wartość g jest inna.

Kolejny problem, z którym musimy sobie poradzić to uproszczenie opisu zjawiska. Faktycznie, siły grawitacji zależą od położenia względem siebie Ziemi, Słońca i Księżyca, na dodatek zmieniają się w czasie. Na szczęście możemy przyjąć, iż są to obiekty z bardzo dobrym przybliżeniem kuliste[1], które możemy zastąpić masami punktowymi w ich centrum. Ze względu na

[1] Spłaszczenie Ziemi wywołane obrotem wynosi 1/300, spłaszczenie Słońca i Księżyca jest niemierzalnie małe.

bardzo duże różnice odległości Ziemia-Słońce i Ziemia-Księżyc (Słońce jest prawie 400 razy dalej), zmiany odległości wywołane ruchem Księżyca można pominąć. Biorąc powyższe założenia pod uwagę, obliczamy stosunek sił:

$$\frac{F_{\oplus\odot}}{F_{☾\odot}} = \frac{G\,\frac{M_{\oplus}M_{\odot}}{r^2}}{G\,\frac{M_{☾}M_{\odot}}{r^2}} = \frac{M_{\oplus}}{M_{☾}} \simeq 80.$$

Jak widać, stała grawitacji G, masa Słońca $M_{\odot}$ oraz odległość Ziemia-Słońce r skracają się. Wynik zależy wyłącznie od stosunku mas, a jego uzyskanie nie wymagało żadnych obliczeń numerycznych.