Zadanie 1.

Seba jedzie w terenie niezabudowanym z maksymalną dopuszczalną prędkością 90 km/h w swoim Seicento o masie całkowitej $m_1 = 700$ kg. Za nim z prędkością $v_2 = 210$ km/h porusza się pancerna limuzyna o masie $m_2 = 2.5$ tony. Nagle oczom ich ukazuje się zasłonięty do tego momentu reklamą znak drogowy D-42 (teren zabudowany), a za nim Policja. Samochód z przodu zmniejsza gwałtownie prędkość do $v_1 = 50$ km/h. Zakładając, że pojazdowi z tyłu nie udało się w ogóle zareagować, obliczyć prędkości pojazdów po zderzeniu. Założyć, że zderzenie było idealnie sprężyste, a pojazdy przed i po zderzeniu poruszały się po linii prostej.

Rozwiązanie.

Potrzebne wzory: pęd $p = mv$, energia kinetyczna $E = mv^2/2$.

Zderzenie jest idealnie sprężyste, czyli zarówno energia mechaniczna jak i pęd są zachowane:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \\ \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1w_1^2}{2} + \frac{m_2w_2^2}{2} \end{cases}$$

Aby zmniejszyć ryzyko pomyłki w rachunkach odpowiednie prędkości PO zderzeniu oznaczono literką w. W drugim równaniu $\frac{1}{2}$ upraszcza się:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2 \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1w_1^2 + m_2w_2^2. \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego układu 2 równań ze względu na 2 niewiadome w_1, w_2 daje rozwiązanie zadania. Część fizyczna zadania w tym momencie przechodzi w część czysto matematyczną. Aby uniknąć rozwiązywania równań kwadratowych, stosujemy znany trik: wyrazy z masą m_1 gromadzimy po lewej stronie znaku równości, te z m_2 po prawej:

$$\begin{cases} m_1v_1 - m_1w_1 = m_2w_2 - m_2v_2 \\ m_1v_1^2 - m_1w_1^2 = m_2w_2^2 - m_2v_2^2. \end{cases}$$

Wyciągamy m_1, m_2 przed nawias:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - w_1) = m_2(w_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2(w_2^2 - v_2^2). \end{cases}$$

W drugim równaniu stosujemy wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - w_1) = m_2(w_2 - v_2) \\ m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1) = m_2(w_2 - v_2)(w_2 + v_2). \end{cases}$$

a następnie dzielimy równania stronami, co daje proste równanie:

$$v_1 + w_1 = w_2 + v_2.$$

Dołączamy pierwotne równanie na pęd:

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 w_1 = m_2 w_2 - m_2 v_2 \\ v_1 + w_1 = w_2 + v_2 \end{cases}$$

i otrzymujemy standardowy układ 2 równań LINIOWYCH z 2 niewiadomymi w_1, w_2. Jego rozwiązanie jest prostsze. Np: wyliczamy z drugiego $w_2 = v_1 + w_1 - v_2$ i wstawiamy do pierwszego:

$$m_1 v_1 - m_1 w_1 = m_2(v_1 + w_1 - v_2) - m_2 v_2$$

co daje:

$$w_2 = \frac{2m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Wstawiając liczby mamy:

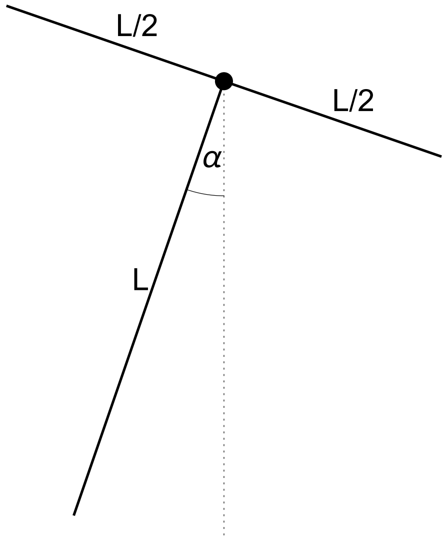
$$w_1 = \frac{2 * 2500\,\mathrm{kg} * 210\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 700\,\mathrm{kg} * 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 2500\,\mathrm{kg} * 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{700\,\mathrm{kg} + 2500\,\mathrm{kg}} = 300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Na podstawie drugiego równania:

$$w_2 = v_1 + w_1 - v_2 = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 210\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 140\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Odpowiedź: tuż po zderzeniu prędkość Seicento będzie wynosiła 300 km/h, natomiast limuzyna zwolni do 140 km/h.

Zadanie 2.



Wahadło fizyczne zbudowane z dwóch skrzyżowanych pod kątem prostym prętów o długości L zawieszono w miejscu połączenia (patrz Rys.). Podać równanie różniczkowe z którego można obliczyć zależność kąta odchylenia od pionu jako funkcję czasu. Podać jego rozwiązanie w przypadku gdy kąt wychylenia jest bardzo mały $\alpha \ll 1$. W szczególności podać wzór na częstość ω i okres „drgań" T.

Rozwiązanie.

Równanie ruchu wahadła fizycznego to:

$$I\ddot{\theta} + mgd \sin\theta = 0,$$

gdzie: I - moment bezwładności wahadła względem osi obrotu, d - odległość osi obrotu od środka ciężkości, m - masa wahadła, g - przyspieszenie ziemskie (natężenie pola grawitacyjnego).

Aby rozwiązać zadanie w konkretnym przypadku musimy obliczyć I, d oraz m. W rozważanym przypadku wahadło jest zbudowane z 2 prętów, dla których moment bezwładności jest znany:

$$I = I_1 + I_2, m = M_1 + M_2, d = \frac{M_1 * 0 + M_2 L/2}{M_1 + M_2}.$$

Dla pręta zamocowanego na końcu $I_1 = \frac{1}{3} M_1 L^2$, na środku $I_2 = \frac{1}{12} M_2 L^2$. Ponadto pręty są identyczne, czyli możemy oznaczyć $M_1 = M_2 \equiv M$. Otrzymujemy więc:

$$I = \frac{5}{12} M L^2,\ m = 2M,\ d = \frac{1}{4} L.$$

Równanie oscylatora harmonicznego ma postać:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0,$$

gdzie ω to częstość drgań. Z porównania równań wahadła i oscylatora, dla małych kątów $\theta \ll 1$ zachodzi $\sin\theta \simeq \theta$ a równania stają się identyczne.

Wobec tego

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} = \frac{2Mg\frac{1}{4}L}{\frac{5}{12}ML^2} = \frac{6}{5}\frac{g}{L}.$$

Zadanie 3.

Wyznaczyć przyspieszenie układu mas m_1 i m_2 połączonych liną przerzuconą przez obracający się bloczek. Całość jest poddana działaniu skierowanego w dół pola grawitacyjnego o natężeniu g.