

ZESTAW ZADAŃ 2

Zadanie 2.1

Zakładając, że odległość wynosi 1200 km a **rok** ma 365.25 dni, szybkość ślimaka v to:

$$v = 120 \frac{\text{km}}{\text{rok}} = 13.7 \frac{\text{m}}{\text{h}} = 3.8 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Jednostki skutecznie przelicza [wyszukiwarka Google](#).

Zadanie 2.2

Oznaczając szybkość studentki przez v_1 , a szybkość studenta przez v_2 otrzymujemy:

$$v_1 = 5.56 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = 7.25 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

czyli $v_2 > v_1$: student jest szybszy.

Zadanie 2.3

Samochód porusza się z szybkością 20 m/s.

Zadanie 2.4

Oznaczając przez x odległość od miejsca postoju patrolu do miejsca złapania, a przez t czas od momentu minięcia patrolu do złapania, otrzymujemy:

$$x = \frac{5}{3} \text{ km} \simeq 1667 \text{ m}, \quad t = 50 \text{ s}.$$

Zadanie 2.4a

Wybierając układ współrzędnych (czas t oraz położenie x) jak w zadaniu 2.4, położenie pojazdu 1 (uciekający) w chwili t można zapisać (ruch jednostajny) jako:

$$x = v_1 t.$$

Analogicznie, położenie pojazdu 2 (policja) zapisujemy jako:

$$x = v_2(t - \Delta t),$$

gdzie Δt to opóźnienie (w chwili $t = \Delta t$ policja nadal stoi w $x = 0$).

Powyższe dwa wzory tworzą układ równań liniowych na niewiadome x, t :

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ x = v_2(t - \Delta t). \end{cases}$$

Jego rozwiązanie to:

$$\begin{cases} t = \frac{v_2 \Delta t}{v_2 - v_1} \equiv \Delta t + \frac{v_1 \Delta t}{v_2 - v_1} \\ x = \frac{v_1 v_2 \Delta t}{v_2 - v_1}. \end{cases}$$

Zadanie 2.5

Prędkość jest pochodną (w sensie matematycznym) położenia po czasie:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \left(x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \right) = \frac{d}{dt}x_0 + \frac{d}{dt}v_0(t - t_0) + \frac{d}{dt}(t - t_0)^2 = \\ &= 0 + v_0 \frac{d}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0 \frac{d}{dt}(t^2 - 2tt_0 + t_0^2) = v_0 + \frac{1}{2}a_0(2t - 2t_0) = v_0 + a_0(t - t_0). \end{aligned}$$

Analogicznie, przyspieszenie jest pochodną prędkości:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(v_0 + a_0(t - t_0)) = a_0.$$

Zadanie 2.6

Po dwóch prostopadłych ulicach poruszają się z identyczną szybkością v dwa samochody. Pierwszy mija skrzyżowanie w chwili t_1 , drugi w chwili t_2 . Kiedy odległość pomiędzy nimi będzie najmniejsza? Ile wynosi?

Położenie na jednej z ulic oznaczamy przez x , na drugiej (prostopadłej) przez y . Wektor położenia samochodu 1, poruszającego się po osi Ox , ma współrzędne $\vec{r} = \{x, y\}$:

$$\vec{r}_1 = \{v(t - t_1), 0\},$$

a drugiego:

$$\vec{r}_2 = \{0, v(t - t_2)\}.$$

Położenie $\vec{\Delta r}$ pojazdu 1 względem pojazdu 2 to różnica wektorów:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \{0, v(t - t_2)\} - \{v(t - t_1), 0\} = \{-v(t - t_1), v(t - t_2)\}.$$

Odległość d w chwili t pomiędzy pojazdami to długość wektora $\vec{\Delta r}$:

$$d(t) = |\vec{\Delta r}| = \sqrt{[-v(t - t_1)]^2 + [v(t - t_2)]^2} = v\sqrt{(t - t_1)^2 + (t - t_2)^2}.$$

Najmniejszą wartość $d(t)$ znajdujemy szukając miejsca zerowego pochodnej: $d'(t) = 0$. W tym konkretnym przypadku można jednak otrzymać wynik bez pochodnych. Otóż pod pierwiastkiem znajduje się funkcja kwadratowa:

$$(t - t_1)^2 + (t - t_2)^2 = 2t^2 - 2(t_1 + t_2)t + t_1^2 + t_2^2 \equiv at^2 + bt + c,$$

gdzie:

$$a = 2, \quad b = -2(t_1 + t_2), \quad c = t_1^2 + t_2^2.$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$\left\{ -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right\} = \left\{ \frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{(t_1 - t_2)^2}{2} \right\}.$$

Wierzchołek paraboli to minimum funkcji kwadratowej.

Odpowiedź: $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$, $d = v\sqrt{\frac{(t_1 - t_2)^2}{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}}|t_1 - t_2|$.

Zadanie 2.7

Punkt materialny porusza się ze stałą szybkością po okręgu o promieniu R . Wynika z tego, iż jego współrzędne w zależności od czasu opisują wzory:

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos(\omega t) \\y(t) &= R \sin(\omega t)\end{aligned}$$

gdzie R i częstość ω są stałe.

Oblicz wektory położenia \vec{r} , prędkości \vec{v} i przyspieszenia \vec{a} oraz ich długości, iloczyny skalarne $\vec{r} \cdot \vec{v}$, $\vec{r} \cdot \vec{a}$, $\vec{v} \cdot \vec{a}$ i wektorowe $\vec{r} \times \vec{v}$, $\vec{r} \times \vec{a}$, $\vec{v} \times \vec{a}$. Które z tych wektorów są prostopadłe a które równoległe?