# Zestaw zadań 1

## Zadanie 1.1

Dane są wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ o współrzędnych:

$$\vec{u} = \{2, -1\}, \quad \vec{v} = \{-2, -2\}, \quad \vec{w} = \{0, 2\}.$$

Oblicz:

$$\vec{u} + \vec{w} = \{2, 1\}, \tag{1a}$$
$$-\vec{u} - \vec{v} = \{0, 3\}, \tag{1b}$$
$$\vec{u} + 3\vec{w} - \vec{v} = \{4, 7\}, \tag{1c}$$
$$\vec{u} - 3(\vec{u} + 2\vec{w}) = \{-4, 10\}, \tag{1d}$$
$$3\vec{w} + 3(2\vec{u} - \vec{v}) = \{18, 6\}, \tag{1e}$$
$$-\vec{u} + [\vec{v} + (2\vec{u} + \vec{v})] = \{-2, -5\}. \tag{1f}$$

Przedstaw interpretację geometryczną działań w postaci strzałek na płaszczyźnie.

## Zadanie 1.2

Dane są wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o współrzędnych:

$$\vec{a} = \{2, 2, 1\}, \quad \vec{b} = \{0, 0, 3\}, \quad \vec{c} = \{-2, 0, 0\}.$$

Oblicz:

$$\vec{a} - \vec{b} = \{2, 2, -2\}, \tag{2a}$$
$$-2\vec{a} - 2\vec{c} = \{0, -4, -2\}, \tag{2b}$$
$$3\vec{c} + \vec{b} - \vec{a} = \{-8, -2, 2\}, \tag{2c}$$
$$\vec{a} - 3(\vec{a} + 2\vec{b}) = \{-4, -4, -20\}, \tag{2d}$$
$$3\vec{b} - (\vec{a} - \vec{c}) = \{-4, -2, 8\}, \tag{2e}$$
$$-2\vec{a} + \left[\vec{c} + (-\vec{b} + \vec{a})\right] = \{-4, -2, -4\}. \tag{2f}$$

## Zadanie 1.3

Oblicz iloczyn skalarny i wektorowy, kąt pomiędzy wektorami oraz długości wektorów:

$$\vec{u} = \{2, 3, 4\}, \qquad \vec{v} = \{-1, -1, -1\}. \tag{3}$$

Odp:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -9, \quad \vec{u}\times\vec{v} = \{1, -2, 1\}, \quad \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(-3\sqrt{\frac{3}{29}}\right) \simeq 164.8^\circ, \quad |\vec{u}| \equiv u = \sqrt{29}, |\vec{v}| = \sqrt{3}.$$

## Zadanie 1.4

Znajdź na płaszczyźnie jednostkowy wektor prostopadły do wektora $\vec{a}$ o współrzędnych:

$$\vec{a} = \{4, 3\}.$$

Odp:

$$\vec{n} = \{-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}.$$

**Zadanie 1.5**

Dane są współrzędne wektorów:

$$\mathbf{a} = \{1, 0, 1\}, \quad \mathbf{b} = \{1, -1, 1\}, \quad \mathbf{c} = \{1, -1, 0\}.$$

Oblicz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 2, \tag{4a}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{1, 0, -1\}, \tag{4b}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} = \{2, -1, -1\}, \tag{4c}$$
$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \{2, 0, 2\} \tag{4d}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - 1 = 0 \tag{4e}$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \{-1, 1, 1\}, \tag{4f}$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \{-1, -1, -1\}, \tag{4g}$$
$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}, \tag{4h}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 1, \tag{4i}$$
$$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \{1, 0, 1\}, \tag{4j}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \tag{4k}$$
$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 2 \tag{4l}$$
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{0} = 0, \tag{4m}$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\ \mathbf{c} = \{2, -2, 0\}, \tag{4n}$$
$$\mathbf{cba} = 1, \tag{4o}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \{0, 0, 0\}. \tag{4p}$$

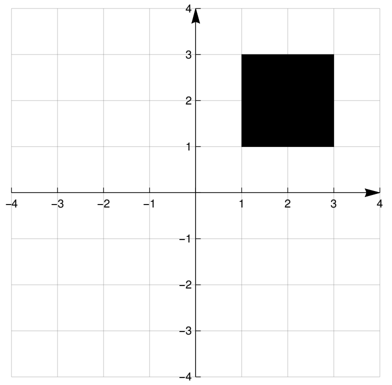
**Zadanie 1.6**

Oblicz dla dowlonych wektorów $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ oraz $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 3\,\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \tag{5a}$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{5b}$$
$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})] \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] - 3\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2, \tag{5c}$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \tag{5d}$$

**Zadanie 1.7**

Kwadrat umieszczono w układzie współrzędnych kartezjańskich w sposób pokazany obok. Podać wspórzędne kartezjańskie i biegunowe wierzchołków.




Odp: zaczynając od dolnego lewego wierzchołka, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara:

$$\{1,1\} \to \{\sqrt{2}, \pi/4 = 45°\},$$
$$\{3,1\} \to \{\sqrt{10}, \operatorname{arc\,tg}(1/3) = 18.4°\},$$
$$\{3,3\} \to \{3\sqrt{2}, \pi/4 = 45°\},$$
$$\{1,3\} \to \{\sqrt{10}, \operatorname{arc\,tg}(3) = 71.6°\}.$$