Zadanie 1.

2-wymiarowe równanie Burgersa, modelujące przepływ płynu z prędkością $\mathbf{u}$ i lepkością ϵ:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = \epsilon\, \Delta\mathbf{u} \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_x(x,y,t), u_y(x,y,t))$ – pole wektora prędkości, za pomocą transformacji Cole-Hopf'a:

$$\mathbf{u} = -2\epsilon\, \nabla \ln \chi(x,y,t)$$

sprowadza się do liniowego równania rozchodzenia się ciepła. Celem zadania jest przedstawienie zbioru nietrywialnych (nie dających się sprowadzić do 1 wymiaru) rozwiązań równania (1) dla $\epsilon \to 0$ i wybranych nieciągłych warunków początkowych. W szczególności należy zbadać jak zachowują się rozwiązania dla których w chwili $t = 0$ pole prędkości rotuje np:

$$\mathbf{u}\Big|_{t=0} = \begin{cases} (-\Omega\, y, \Omega\, x,) & \text{dla} \quad x^2+y^2 > R^2 \\ 0 \quad \text{dla} \quad x^2+y^2 < R^2 \end{cases}$$

oraz posiadających w chwili $t = 0$ symetrię „wielokątną”:

$$\mathbf{u}\Big(r,\phi,t=0\Big) = \mathbf{u}\Big(r,\phi+\frac{2\pi}{n}\Big)$$

we współrzędnych biegunowych, gdzie $n = 3,4,5,6\ldots$.

Zadanie 2.

Celem zadania jest napisanie programu dokonującego wizualizacji lini sił zadanego pola wektorowego w dwóch i trzech wymiarach oraz zademonstrowanie działania na wybranych przykładach np. pola magnetycznego pochodzącego of wielokątnej ramki z prądem elektrycznym itp. Program powinien działać adaptywnie, bez dużej ingerencji użytkownika dobierając automatycznie gęstość lini sił pola, ewentualne kolory itp.
UWAGA! *Wizualizacja za pomocą „strzałek” jest wykluczona!*

Zadanie 3.

Równanie:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F[u(x,t)]}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

gdzie funkcja F jest zadana z góry, posiada rozwiązanie szczególne postaci

$$u(x,t) = h\left(\frac{Ax+B}{Ct+D}\right) \tag{3}$$

gdzie h jest funkcją odwrotną do pochodnej funkcji F:

$$h(F'(x)) = x$$

Celem jest znalezienie przybliżonego rozwiązania zagadnienia poczatkowego równania (2) w postaci posklejanych funkcji (3).

Zadanie 4.

Działanie relatywistycznego rotatora Staruszkiewicza ma postać:

$$S = -\int d\tau \, m\sqrt{\dot{x}\dot{x}}\,\sqrt{1+\sqrt{-l^2\frac{\dot{k}\dot{k}}{(k\dot{x})^2}}}$$

gdzie, m – masa, l – długość rotatora oraz:

$$x(\tau) \equiv [T(\tau), X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)]$$

jest 4-wymiarową trajektorią czasoprzestrzenną, natomiast

$$k(\tau) \equiv [K_t(\tau), K_x(\tau), K_y(\tau), K_z(\tau)]$$

czterowektorem *zerowym*:

$$K_t^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z$$

określającym położenie osi obrotu rotatora w (czaso)przestrzeni. Celem zadania jest wyprowadzenie równań ruchu rotatora z zasady najmniejszego działania oraz ich rozwiązanie, analityczne lub numeryczne. Czy można coś powiedzieć o granicy nierelatywistycznej dla tego układu?

Zadanie 5. [Juz zostalo rozwiazane]

Powierzchnia 3D opisana równaniem:

$$81\,(x^3+y^3+z^3) - 189\,(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) + 54\,xyz + 126(xy+xz+yz) - 9\,(x^2+y^2+z^2) - 9(x+y+z) + 1 = 0$$

zawiera w sobie 27 linii prostych. Znaleźć wszystkie. Wynik pokazać na wykresie 3D.