ZADANIE 1.

Sprawdzić tożsamości:

a)

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \times \mathbf{V} = Det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix}$$

gdzie $\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}$ itd. to wersory w kierunkach x,y,z.

b)

$$W_i = \epsilon^{ijk} U_j V_k \equiv \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon^{ijk} U_j V_k$$

gdzie W_i to i-ta składowa wektora $\mathbf{W}$ itd., natomiast ϵ^{ijk} to symbol Levi-Civity. *Wskazówka:* W MATHEMATICE symbol Levi-Civity to **Signature[{i,j,k}]** .

ZADANIE 2.

Sprawdzić podane w wikipedii wzory na:

a) gradient, rotację, dywergencję i operator Laplace'a we współrzędnych kartezjańskich, cylindrycznych i sferycznych

b) laplacian działający na pole wektorowe

c) tożsamości 1-5

ZADANIE 3.

Dane jest pole prędkości rotującego płynu we współrzędnych cylindrycznych:

$$\mathbf{v}(r, \phi, z) = \Omega\, r \mathbf{e}_\phi$$

oblicz następujące wyrażenia:

a)

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{v})$$

b)

$$\frac{1}{2} \mathrm{grad}\, v^2 - \mathbf{v} \times \mathbf{rot}\, \mathbf{v}$$

c) Powtórz obliczenia dla $\Omega = \Omega(r, z)$

ZADANIE 4.

Dla macierzy 5×5 $\mathcal{A}$ o składowych:

$$A_{ij} = \sqrt{1 + i + j}$$

gdzie $i, j = 0 \dots 4$ obliczyć wyznacznik, ślad, macierz odwrotną, wartości własne i wektory własne. Dokonać dekompozycji macierzy do postaci

$$\mathcal{A} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{J} \mathcal{U},$$

gdzie diagonalna macierz $\mathcal{J}$ zawiera na przekątnej wartości własne macierzy $\mathcal{A}$.

ZADANIE 5. Niech rzeczywista kwadratowa macierz $\mathcal{O}$ o wymiarze 3×3 dana jest wyrażeniem:

$$\mathcal{O} = e^{\alpha \mathcal{A}}$$

gdzie $\alpha > 0$ i składowe macierzy $\mathcal{A}$ są równe $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} n^k,$$

wektor $\mathbf{n}$ ma składowe n^k równe:

$$n^1 = \cos\phi \sin\vartheta$$
$$n^2 = \sin\phi \sin\vartheta$$
$$n^3 = \cos\vartheta,$$

Należy podać składowe macierzy $\mathcal{O}$ w następujacych przypadkach:

1. $\alpha = 0$
2. $\vartheta = 0$
3. $\vartheta = \pi/2,\ \phi = 0$
4. $\vartheta = \pi/2,\ \phi = \pi/2$

a ponadto obliczyć w przypadku ogólnym (dla dowolnych rzeczywistych wartości α, ϑ i ϕ) wyznacznik, ślad, wielomian charakterystyczny oraz wartości własne.

ZADANIE 6. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} = \mathcal{B}^2 - \mathcal{I}$$

gdzie:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{I}$ to macierz jednostkowa.

Zadania bardzo podobne do tych które pojawią się na kolokwium zaliczeniowym.

Zadanie A.

Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne:

$$x'' + x' = \sin^3 x$$

z warunkami początkowymi:

$$x(0) = 0, x'(0) = a$$

gdzie $0 < a < 2$.

Dla jakiej wartości a pierwsze miejsce zerowe x_0 funkcji x(t) będącej rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego położone jest najdalej od punktu 0?

Zadanie B.

Rozwiąż równanie:

$$\int_0^{\pi a} \sin^4 ax\, dx = \int_0^{\pi a} \cos^4 ay\, dy$$

dla rzeczywistego $|a| \leq 2$.

Zadanie C.

Znajdź rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego:

$$y^{(4)} + y^{(2)} + y(x) = 1$$

przechodzące przez punkty $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$ i $(2, 0)$.

Zadanie D.

Dana jest macierz kwadratowa $\mathcal{A}$ o elementach

$$A_{i,j} = (i - xj)^5$$

gdzie $i, j = 1, 2 \ldots 6$.

Znajdź rzeczywiste rozwiązania równania:

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{A})\mathrm{Det}(\mathcal{A}^{-1}) = x$$

Zadanie E.
Znajdź rzeczywiste rozwiązania równania:

$$|x|^x = \exp(\pm x)$$

Zadanie F.
Rozwiąż układ równań:

$$4x^2 - 9xy + 4y^2 = 0$$

$$3(x - e^{-x^2})^2 - 8(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 = 0$$

Zadanie G.
Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_0^{\infty} f(t)\, dt$$

z funkcji f która jest rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$y'' + y = e^{-x}$$

z warunkami początkowymi $y[0] = 1/2, y'[0] = -1/2$.