Algebra Symboliczna

Wykład IX

Andrzej Odrzywolek

Instytut Fizyki, Zakład Teorii Względności i Astrofizyki

05.12.2007, środa, 13:15

Dane kontaktowe

dr Andrzej Odrzywołek

pokój 447, IV piętro

E-mail: `odrzywolek@th.if.uj.edu.pl`

Wykład: środy 13.15-15.00 s. 128

Ćwiczenia: piątki 10.30-12.00

Konsultacje: środy ∼11-13, czwartki 10-12

WWW: http://ribes.if.uj.edu.pl/alsymb/

Układy równań liniowych

Rozważmy „dobry” układ równań:

$$
\begin{aligned}
x + y + z + t &= 1\\
2x + 4y - t &= 2\\
x - y + 2t &= 0\\
x + y - z - t &= -1
\end{aligned}
$$

In:=sys={ x + y + z + t == 1, 2 x + 4 y - t == 2, x - y +2 t == 0, x + y - z - t == -1}

In:= Solve[sys, { x, y, z, t }]

Out = $\{\{x \to -2, y \to 2, z \to -1, t \to 2\}\}$

In:= Reduce[sys , { x , y , z , t }]

```
Out = x == -2 && y == 2 && z == -1 && t == 2
```

Układ równań liniowych: postać macierzowa

Ten sam układ równań możemy przepisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} 1x+ & 1y+ & 1z+ & 1t = 1 \\ 2x+ & 4y- & 0z- & 1t = 2 \\ 1x- & 1y+ & 0z+ & 2t = 0 \\ 1x+ & 1y- & 1z- & 1t = -1 \end{array}$$

Układ równań liniowych: postać macierzowa

Układ równań zapisany za pomocą macierzy:

oznaczając:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy równanie macierzowe:

$$A \cdot X = B$$

Wprowadzanie macierzy w MATHEMATICE

Macierze jako listy

Wprowadzamy macierz *A*:

A = { { 1, 1, 1, 1 } { 2, 4, 0,-1 }, { 1,-1, 0, 2 }, { 1, 1,-1,-1 } }

- Macierz prostokątna zawierająca N kolumn i M wierszy ma postać zagnieżdzonych M list z których każda zawiera N elementów. W przykładzie powyżej mamy macierz 4x4, więc wpisujemy ją jako listę czterech 4-elementowych list.
- aby wyświetlić macierz w postaci tradycyjnej używamy **MatrixForm[A]** lub zaznaczamy listę i naciskamy Ctrl+Shift+T (z menu Cell→ConvertTo→TraditionalForm)
- **MatrixForm** służy wyłącznie do „oglądania” macierzy; nie mozna w tej formie wykonać żadnych operacji matematycznych: są one wykonywane na *listach*

Macierze a wektory w MATHEMATICE

Liczby, wektory, macierze

1. często (szczególnie w fizyce) automatycznie utożsamiamy liczby rzeczywiste z macierzami rzeczywistymi 1×1 oraz wektory N-elementowe z macierzami $1 \times N$ lub $N \times 1$
2. obiekty te nie są jednak identyczne ale *izomorficzne*: można w sposób jednoznaczny (i oczywisty) przypisać każdej macierzy 1×1 liczbę, a my dokonujemy tej konwersji automatycznie
3. w MATHEMATICE równość **1=={{1}}** *nie zachodzi*!

Operator **Dot** (kropka)

Mnożenie macierzowe oraz inne zdefinowane operacje na wektorach, macierzach i tensorach wykonujemy operatorem „." !

Wektory

- wektor jest *listą*, np:
  In:= r = {x,y,z}
- pojęcia *„wektor kolumnowy”*, *„wektor wierszowy”* często uzywane w fizyce oznaczają faktycznie macierze $1 \times N$ lub $N \times 1$
- dopuszczalne operacje na wektorach to m.in:
  1. iloczyn skalarny np: **r . r** (*wynikiem jest* **liczba** !)
  2. mnożenie przez liczbę np: **a r**
  3. iloczyn wektorowy np: **Cross[r,r]**
  4. mnożenie przez macierz np: **A . {a,b,c,d }** (wynikiem jest wektor, macierz dokonuje „tranformacji” wektora)

Macierze $1 \times N$ i $N \times 1$

- „wektor wierszowy" (poziomy) czyli macierz o wymiarze $1 \times N$:
  poziomy = {{X,Y,Z}}
- „wektor kolumnowy" (pionowy) czyli macierz o wymiarze $N \times 1$:
  pionowy = { {x }, {y}, {z }}
- dopuszczalne operacje na wektorach macierzowych to m.in:
  1. mnożenie **pionowy . poziomy** (wynikiem jest macierz $N \times N$)
  2. mnożenie **poziomy . pionowy** (wynikiem jest macierz 1×1)
  3. mnożenie przez liczbę np: **a pionowy**
  4. mnożenie lewostronne wektora pionowego przez wektor zwykły oraz prawostronne poziomego np: **r . pionowy** lub **poziomy . r** (wynikiem jest wektor 1-elementowy, czyli 1-elementowa lista)
  5. mnożenie przez macierz $N \times N$, lewostronne lub prawostrone, jak wyżej dla wektora (wynikiem jest wektor macierzowy)

Macierze w MATHEMATICE

Macierze kwadratowe $N \times N$

- dopuszczalne operacje na macierzach kwadratowych to m.in:
  1. mnożenie **macierzA . macierzB** (wynikiem jest macierz $N \times N$, wynik *zależy* od kolejności składników!)
  2. mnożenie przez wektor lub wektor macierzowy lewostronne i prawostronne np: **poziomy . A . pionowy**
  3. macierz odwrotna $\mathcal{A}^{-1}$ **Inverse[A]**
  4. potęgowanie macierzy **MatrixPower[A, 7]**
  5. eksponenta macierzy $e^{\mathcal{A}}$: **MatrixExp[A]**
  6. wyznacznik macierzy $\det \mathcal{A}$: **Det[A]**
  7. ślad macierzy (suma wartości na przekątnej) : **Tr[A]**
  8. wektory własne: **Eigenvectors**; wartości własne: **Eigenvalues[A]**

Operator mnożenia macierzy

MATHEMATICA wprowadza specjalny operator *mnożenia macierzy*: kropkę – zwykły znak mnożenia *nie działa!*)
Operator ten wykonuje mnożenie elementów (przede wszystkim macierzy) w sytuacji kiedy jest to możliwe, np. mnożenie $A \cdot B$ wykonujemy przez **A.B** gdy liczba kolumn A jest równa liczbie wierszy B.

Kolejność mnożenia macierzy jest *bardzo istotna* gdyż wynik zależy od ustawienia czynników np.

1. Dla macierzy kwadratowych w ogólności **A.B** nie równa się **B.A**
2. Jeżeli X jest wektorem kolumnowym a Y wektorem wierszowym to **X.Y** jest *macierzą kwadratową* natomiast **Y.X** macierzą 1x1 ktorą zwykle utożsamia się z *liczbą (zespoloną)*
3. Jeżeli ilość kolumn pierwszej macierzy różni się od ilości wierszy drugiej to mnożenie jest niewykonalne i wyświetlony zostanie odpowiedni błąd. Mnożenie w odwrotnej kolejności może jednak okazać się możliwe.

Podstawowe operacje „arytmetyczne”

Kombinację liniową macierzy, czyli operacje mnożenia przez liczbę oraz dodawania (odejmowania) macierzy wykonujemy uzywając standardowych symboli $+$, $-$, $*$ (spacja) W prosty sposób możemy również obliczyć n-tą potęgę macierzy kwadratowej ($N \times N$) jako A^n oraz macierz odwrotną A^(-1).

Przykład:

Oblicz wyrażenie, gdzie $\mathcal{A}$ jest macierzą kwadratową, np:

In:= A = {{ λ, 1 }, { -1, 1 } }

$$3 \cdot A^2 - A + A^{-1} + A^4$$

W MATHEMATICE obliczamy wyrażenie jako:

In:= 3 A . A - A + Inverse[A] + MatrixPower[A,4]

In:= % // MatrixForm

Macierzowe rozwiązanie układu równań

Teraz możemy rozwiązać układ równań „macierzowo”. Mnożymy obie strony równania:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{X} = \mathcal{B}$$

lewostronnie przez $\mathcal{A}^{-1}\cdot$

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{X} = \mathcal{B} \quad / \quad \mathcal{A}^{-1}\cdot$$

$$\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{X} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{B}$$

$\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A}$ jest równe macierzy jednostkowej $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \cdot \mathcal{X} = \mathcal{X}$ więc otrzymujemy formalne rozwiązanie – gdyż macierz odwrotną należy jeszcze obliczyć:

$$\mathcal{X} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{B}$$

Powyższe wyrażenie obliczamy jako:
In:= Inverse[A] . B i otrzymujemy:
`Out = {-2,2,-1,2 }`

Typowe obliczenia związane z macierzami

Bez problemu wykonamy wszystkie typowe obliczenia związane z macierzami np:

- Wyznaczenie wielomianu charakterystycznego z definicji: **Det[A - x . IdentityMatrix[4]]** lub korzystając z odpowiedniej instrukcji **CharacteristicPolynomial[A , x]**
- Wartości własne macierzy A możemy obliczyć znajdując pierwiaski wielomianu charakterystycznego W: **NSolve[W,x]** lub funkcją **Eigenvalues[A]**
- Sprowadzenie do postaci diagonalnej
- Dekompozycja macierzy
- . . . inne

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Bardzo ważne twierdzenie algebry mówi, że jeżeli do wielomianu charakterystycznego $W_n(\lambda)$ macierzy kwadratowej $n \times n$ $\mathbf{A}$ podstawimy za λ samą macierz $\lambda = \mathbf{A}$ to otrzymamy macierz zerową:

$$W_n(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_n \mathbf{A}^{n-1} + \ldots = 0$$

Sam A. Cayley wykonał obliczenia dla macierzy o $n = 2$ i $n = 3$ i trafnie odgadł, że twierdzenie zachodzi dla dowolnego rozmiaru macierzy. Nie wykonał jednak obliczeń dla $n > 3$ gdyż prowadzą one do skomplikowanych wyrażeń. Obecnie możemy takie obliczenia wykonać przy pomocy programu MATHEMATICA w kilka minut.

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona $n = 2$

A = { { a, b} , { c, d } }
wielomiancharakterystyczny = CharacteristicPolynomial[A, λ]
`Out = -b c + a d - a` λ `- d` λ `+` λ^2
Warto wiedzieć, że wyraz wolny (bez λ) jest równy *wyznacznikowi* macierzy A:
wyznacznik = Det[A]
`Out = -b c + a d`
natomiast wyraz przy λ^{n-1} to ślad macierzy A ze znakiem minus:
slad = Tr[A]
`-b c + a d`

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona $n = 2$ c.d.

Nie możemy podstawić po prostu $\lambda \to A$ gdyż:

1. potęgowanie macierzy wykonujemy instrukcją **MatrixPower** podczas gdy w wielomianie charakterystycznym występuje potęgowanie wyrażeń algebraicznych **Power**
2. nie możemy dodać do macierzy liczby będącej wyrazem wolnym (nie zgadza się wymiar); musimy dodać **IdentityMatrix[2] Det[A]** gdzie **IdentityMatrix[n]** to macierz jednostkowa $n \times n$ np:
   In := IdentityMatrix[2]
   `Out = {{1,0},{0,1}}`

Podstawiamy macierz do wielomianu char. w dwu krokach:
wielchar - wyzn /. {λ →A, Power→MatrixPower }
% + IdentityMatrix[2] wyzn // Simplify
`Out = { {0 , 0}, { 0 , 0 } }`

Podobnie można spróbować też sprawdzić bezpośrednim rachunkiem tożsamość:

$$\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\mathrm{tr}\,\mathbf{A}}$$

In: = Det[MatrixExp[A]] - Exp[Tr[A]]

$$\texttt{Out} = -\frac{e^{aa+bb}}{2} + \frac{aa^2 e^{aa+bb}}{2(aa^2+4abba-2aabb+bb^2)} + \frac{2abbae^{aa+bb}}{aa^2+4abba-2aabb+bb^2} - \frac{aabbe^{aa+bb}}{aa^2+4abba-2aabb+bb^2} + \frac{bb^2 e^{aa+bb}}{2(aa^2+4abba-2aabb+bb^2)} + \frac{1}{4}e^{aa+bb-\sqrt{aa^2+4abba-2aabb+bb^2}} - \frac{aa^2 e^{aa+bb-\sqrt{aa^2+4abba-2aabb+bb^2}}}{4(aa^2+4abba-2aabb+bb^2)} - \frac{abbae^{aa+bb-\sqrt{aa^2+4abba-2aabb+bb^2}}}{aa^2+4abba-2aabb+bb^2} + \frac{aabbe^{aa+bb-\sqrt{aa^2+4abba-2aabb+bb^2}}}{2(aa^2+4abba-2aabb+bb^2)} - \frac{bb^2 e^{aa+bb-\sqrt{aa^2+4abba-2aabb+bb^2}}}{4(aa^2+4abba-2aabb+bb^2)} + \dots$$

In:= Simplify[%]

`Out = 0`

Dla $n > 2$ niestety MATHEMATICA nie upraszcza wyniku