Algebra Symboliczna

Wykład VII

Andrzej Odrzywolek

Instytut Fizyki, Zakład Teorii Względności i Astrofizyki

11.21.2007, środa, 13:15

Dane kontaktowe

dr Andrzej Odrzywołek

pokój 447, IV piętro

E-mail: `odrzywolek@th.if.uj.edu.pl`

Wykład: środy 13.15-15.00 s. 128

Ćwiczenia: piątki 10.30-12.00

Konsultacje: środy ∼11-13, czwartki 10-12

WWW: http://ribes.if.uj.edu.pl/alsymb/

Numeryczne rozwiązywanie r. różniczkowych zwyczajych

Rozwiazanie numeryczne *versus* symboliczne

- symbolicznie: **DSolve[y'[x]==y[x]+Sin[x],y[x],x]**
- symbolicznie:
  DSolve[{ y'[x]==y[x]+Sin[x],y[0]==y0 } ,y[x],x]
- symbolicznie:
  DSolve[{ y'[x]==y[x]+Sin[x], y[0]==1 },y[x],x]
- numerycznie:
  NDSolve[{ y'[x]==y[x]+Sin[x], y[0]==1 },y[x], {x,-1,1}]

Uwagi

1. Aby użyć **NDSolve** *wszystkie* parametry oraz warunki początkowe *muszą* mieć *wcześniej* nadane wartości liczbowe
2. Ze wzgledu na metodę generowania rozwiązań (funkcje interpolujące) *musi* być z góry zadany zakres niewiadomej w którym szukamy rozwiązania

Dopuszczalne warunki nakładane na rozwiązanie

Standardowo, numerycznie rozwiązuje się dwie klasy problemów:

- zagadnienie początkowe: podajemy wartość funkcji i jej pochodnych w *jednym* punkcie
- zagadnienie brzegowe: podajemy wartości funkcji (i ewentualnie pochodnych) *na końcach* przedziału
- pewne zagadnienia mieszane

UWAGA!

Ograniczenia opisane wyżej nie oznaczają, że *nie da się* rozwiązywać inaczej sformułowanych zagadnień numerycznie. Oznacza to tylko tyle, że nie można tego zrobić jednej linijce (jedną komendą) !

Przykład (1)

Rozwiązujemy równanie:

$$y' = y + \sin x$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$ – funkcja musi przyjmować wartość 1 w punkcie $x = 0$.
Zarówno **DSolve** jak **NDSolve** bezproblemowo rozwiązują zagadnienie:

In:= DSolve[{ y'[x] == y[x] + Sin[x], y[0] == 1 }, y[x], x]

Out = {{y[x] -> 1/2 (3 e^x - Cos[x] - Sin[x]) } }

NDSolve[{y'[x] == y[x] + Sin[x], y[0] == 1}, y[x], {x, -1, 1}]

```
Out =y[x]->InterpolatingFunction[-1.,1.,<>][x]
```

Przykład

Jeżeli jednak zmienimy warunek na niestandardowy, np: $y'(0) = 1$ – *pochodna* funkcji musi przyjmować wartość 1 w zerze, **NDSolve** wyświetli komunikat o błędzie:

In:= DSolve[{ y'[x] == y[x] + Sin[x], y'[0] == 1 }, y[x], x]

`Out = {{y[x]->1/2 (3 e^x-Cos[x]-Sin[x])}}`

NDSolve[{y'[x]==y[x]+Sin[x],y'[0]==1},y[x],{x,-1,1}] `Out =`

```
NDSolve::icord: The differential order of the
functions in the initial or boundary conditions
should be strictly less than in the differential
equations.
```

Dzieje się tak pomimo tego, że w obydwu wypadkach rozwiązanie (analityczne) jest identyczne!

Wniosek

Warto przeformułować zagadnienie, tak aby dostosować je do możliwości **NDSolve**, a nie wklepywać bezmyślnie treść zadania/problemu

Przykład (3)

W przykładzie powyżej możemy zmusić **NDSolve** do działania w następujacy sposób:

1. różniczkujemy obustronnie:

$$y'' = y' + \cos x$$

2. wprowadzamy nową funkcję $z(x) = y'(x)$
3. rozwiazujemy zagadnienie (teraz początkowe)

$$z' = z + \cos x, \quad z(0) = 1$$

4. funkcję $y(x)$ możemy wyliczyć korzystając np. z **NIntegrate**

UWAGA!

Wysilek włożony w rozwiązanie numeryczne problemu nie ma na ogół sensu, gdy MATHEMATICA znajduje rozwiązanie analityczne. Nie zawsze jest to jednak możliwe.

Zagadnienie brzegowe

Znajdź rozwiazanie równania:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = \sin x$$

które dla $x = 0$ i $x = \pi$ przyjmuje wartośći $y = 0$ oraz $y' = 0$.

In:= NDSolve[{y””[x] + y[x] == Sin[x], y[0] == 0, y’[0] == 0, y[Pi] == 0, y’[Pi] == 0 }, y[x], {x, 0, Pi}]

Rzut c.d.

Teraz przykład z poprzedniego wykładu rozwiązujemy bez problemu: **NDSolve[Union[sys, ic], r, { t,0,100 }]**

R. r. o wartościach zespolonych

Aby wymusić rozwiązanie w domenie zespolonej podajemy zespolone warunki początkowe/brzegowe:

NDSolve[{y''[x] + y[x]^2 == 1,
y[0] == 0, y'[0] == 1 + I}, y, {x, 0, 30}]

Równania różniczkowe cząstkowe

Równaniem różniczkowym cząstkowym nazywany równanie zawierające funkcję wielu zmiennych np: $F(x, y)$ oraz jej pochodne cząstkowe np:

$$A\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2B\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + C\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + cF(x, y) = f(x, y)$$

Proste przykłady (1)

Szukamy rozwiązania ogólnego równania

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + x\,\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0$$

Uwaga!

Służy do tego ta sama komenda którą rozwiązujemy równania rózniczkowe zwyczajne: **DSolve**.

In:= DSolve[D[F[x, y], y] + x D[F[x, y], x] == 0, F[x, y], {x, y}]

```
Out = { { F[x, y] -> C[1][y - Log[x]] } }
```

Wynik ten oznacza, że szukanym rozwiazaniem równania jest dowolna funkcja (oznaczana jako C[1]) argumentu $y - ln(x)$, np: $\sin(y - ln(x)), (y - ln(x))^4, \ln(y - ln(x)), \frac{1}{y - ln(x)}, ln(x) - y + 23$

Proste przykłady (2)

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} + y\,\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} - z^2\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = 0$$

In:=DSolve[D[F[x, y, z], y] + y D[F[x, y, z], x] -
z^2 D[F[x, y, z], z] == 0, F[x, y, z], {x, y, z}]
`Out= F[x, y, z] -> C[1][` $1/2(-2x + y^\wedge 2), (-1 + yz)/z]$
Wynik ten oznacza, że szukanym rozwiazaniem równania jest dowolna funkcja (C1) *dwóch zmiennych* której argumentami są funkcje $-2x + y^2$ oraz $-(zy - 1)/z$
Weźmy np: $C1(a, b) = a^b$, wtedy rozwiązaniem równania jest funkcja:

$$F(x,y) = (-2x + y^2)^{-(zy-1)/z}$$

Nawet sprawdzenie tego (ręcznie) nie jest proste ...

Proste przykłady (3)

Równanie falowe

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

In:=DSolve[D[ϕ[x, t], t, t] + D[ϕ[x, t], x,x] == 0, ϕ[x, t], {x, t}]

```
Out= { { ϕ[x, t] -> C[1][t + x] + C[2][t - x] } }
```

Wynik ten oznacza, że szukanym rozwiazaniem równania jest suma fal biegnących z „prędkością światła” (tu równą 1) w lewo i prawo.

UWAGA!

Jakakolwiek modyfikacja zagadnienia (za wyjatkiem dodania stałej) lub dodanie kolejnego wymiaru spowoduje, że nie znajdziemy używając **DSolve** *żadnego* rozwiązania!

Nie oznacza to że takie rozwiązania nie są znane . . .

Formalnie możemy rozwiązywać r. cząstkowe numerycznie

- musimy podać warunki początkowe i brzegowe *równocześnie*
- war. pocz. są funkcjami; określają przebieg funkcji i jej pochodnych w chwili t=0
- warunki brzegowe są f. czasu i zadają z góry zachowanie się rozwiązania (mogą to być w szczególności stałe, np. dla drgajacej struny)

Przykład: drgania struny

Struna jest zamocowana w punktach $x = 0$ oraz $x = \pi$. W chwili t=0 przyjmuje kształt paraboli.

In:= NDSolve[{ D[ϕ[x,t],t,t]-D[ϕ[x,t],x,x]==0,ϕ[0,t]==0, ϕ[Pi ,t]==0, ϕ[x,0]==x (Pi-x),Derivative[0,1][ϕ]][x,0]==0 }, ϕ, {x,0, Pi},{t,0,100}]