Algebra Symboliczna

Wykład VI

Andrzej Odrzywolek

Instytut Fizyki, Zakład Teorii Względności i Astrofizyki

14.11.2007, środa, 13:15

Dane kontaktowe

dr Andrzej Odrzywołek

pokój 447, IV piętro

E-mail: `odrzywolek@th.if.uj.edu.pl`

Wykład: środy 13.15-15.00 s. 128

Ćwiczenia: piątki 10.30-12.00

Konsultacje: środy ∼11-13, czwartki 10-12

WWW: http://ribes.if.uj.edu.pl/alsymb/

Co to jest równanie różniczkowe?

- równanie zawierające *pochodne* pewnej funkcji np:

$$\frac{d\ f(t)}{dt} = \cos t$$

- rozwiązaniem r. różniczkowego jest *zbiór* funkcji np. dla równania powyżej:

$$f(t) = \sin t + a$$

  dla dowolnej stałej a
- o ile rozwiązanie równania powyżej jest oczywiste (pochodna jakiej funkcji to cosinus?) to w przypadku ogólnym jest to niezwykle rozbudowana gałąź matematyki
-

Najważniejsze typu r. różniczkowych

- równania różniczkowe *zwyczajne* : wszystkie funkcje są funkcjami *jednej* zmiennej
- równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego: zawierają tylko pierwsze pochodne
- układy równań różniczkowych rzędu pierwszego: każde równanie lub układ równań zawierający pochodne dowolnie wysokiego stopnia można sprowadzić do takiej postaci
- równania różniczkowe cząstkowe: zawierają funkcje dwóch lub więcej zmiennych i ich pochodne cząstkowe np:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x^2}$$

Zastosowanie r. różniczkowych zwyczajnych

Fizyka

1. równania ruchu Newtona
2. równanie Schrodingera
3. rozpad promieniotwórczy
4. reakcje jądrowe w gwiazdach
5. odkształcenie prętów
6. równowaga ciekłych kryształów
7. ...

Inne

1. równania geodezyjnych w zakrzywionej czasoprzestrzeni
2. teoria chaosu
3. populacja drapieżników/roślinożerców
4. ...

Rowiązanie ogólne a rozwiazanie szczególne

- analityczne (ogólne) rozwiązanie równania różniczkowego zawiera (zwykle) dowolne stałe
- aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie musimy podać tyle dodatkowych warunków ile jest stałych dowolnych
- jeżeli znamy rozwiązanie ogólne, warunki te mogą być praktycznie dowolne
- metody numeryczne są natomiast ściśle związane ze sposobem zadania tych warunków (zagadnienie początkowe i zagadnienie brzegowe) są więc narzędziem słabszym

Zagadnienie początkowe

Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n, czyli zawierającego co najwyżej n-te pochodne funkcji niewiadomej:

$$F\left(x, y(x), y^{'}(x), y^{''}(x), \ldots y^{(n)}(x)\right) = 0$$

jest wyznaczone jednoznacznie (przy pewnych założeniach) poprzez zadanie *warunków początkowych:*

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y^{'}(x_0) &= y_1 \\ &\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

czyli wartości funkcji i jej pochodnych (aż do $n-1$-tej) w pewnym punkcie x_0.
Jeżeli nie zadamy warunków początkowych to rozwiązanie zawiera w ogólności n stałych dowolnych.

Powyższe twierdzenie dotyczy też układów k równań, ale wtedy należy funkcję $y(x)$ i jej pochodne rozumieć jako k-elementowe wektory:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathbf{y}(t) \equiv [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_k(t)] \\
y^{'}(t) &= \mathbf{y}^{'}(t) \equiv \left[y_1^{'}(t), y_2^{'}(t), \ldots, y_k^{'}(t)\right] \\
&\ldots \\
y^{(n-1)}(t) &= \mathbf{y}^{(n-1)}(t) \equiv \left[y_1^{(n-1)}(t), y_2^{(n-1)}(t), \ldots, y_k^{(n-1)}(t)\right]
\end{aligned}
$$

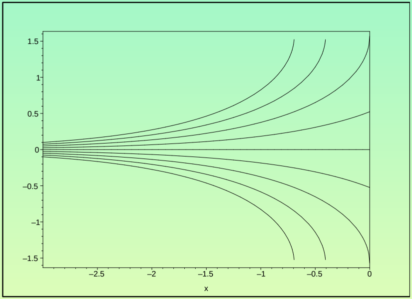
Stała całkowania r. r. pierwszego rzędu

Dla równania:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} y$$

rozwiązaniem ogólnym jest:

$$y(x) = \arcsin\left(e^x C1\right)$$



Wykres dla $C1 = -2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2$

Kilka uwag

Równania różniczkowe są bardzo ważne!

- większość złożonych problemów nauki współczesnej jest, na pewnym przynajmniej etapie, formułowana w języku r. różniczkowych
- MATHEMATICA pozwala rozwiązać *prawie każde* równanie różniczkowe zwyczajne, analitycznie lub/i numerycznie
- opanowanie wszystkich znanych metod analitycznych i numerycznych zwykle przekracza nasze możliwości ...
- ... i jest właściwie niepotrzebne
- do programowania lub użycia wyspecjalizowanego software może nas zmusić jedynie brak mocy obliczeniowej (np. konieczność rozwiązywania milionów równań)
- rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych jeszcze na długie lata pozostanie poza zasięgiem systemów typu MATHEMATICA (braki hardware i software)

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

DSolve

Polecenie **DSolve[problem, funkcje niewiadome, zmienna]** rozwiązuje *analitycznie* „problem" na który składa się:

1. równanie różniczkowe zwyczajne
2. warunki początkowe lub/i brzegowe (opcjonalne)
3. inne warunki narzucane na rozwiązanie (opcjonalne)

Uwagi

1. układy równań są rozwiązywane identycznie jak pojedyncze równania – podajemy listy (wektory) równań, niewiadomych funkcji itd.
2. **DSolve** jest w stanie rozwiązywać również proste równania różniczkowe cząstkowe
3. numeryczna wersja **DSolve** to **NDSolve** – wymaga podania jawnie przedziału w którym szukamy rozwiązania

Najprostsze przykłady (1)

Najprostszy przykład

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

In:= DSolve[y'[x]==Exp[x], y[x], x]

`Out=` $\{\ \{\ y[x]->e^x+C[1]\ \}\ \}$

Rozwiazanie zawiera jedną stałą dowolną **C[1]**

Uwaga:

- stałe dowolne są oznaczane jako **C[1], C[2]** itd.
- Należy *explicite* podać zmienną niezależną np: **y'[x]**
  Wyrażenie typu: **y' = Exp[x]** stosowane w notacji tradycyjnej spowoduje wyświetlenie komunikatu o błędzie – funkcja *zawsze* musi posiadać argument! Komputer nie „domyśli" się o co nam chodzi.

Najprostsze przykłady (1)

Rowiązanie szczególne

Aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie możemy np. zażądać aby rozwiązanie przechodziło przez zadany punkt $(0, 0)$ (początek ukł. wsp.):

In:=DSolve[{ y'[x] == Exp[x], y[0] == 0 }, y[x], x]

Out = $\{\{y[x]->e^x - 1\ \}\}$

Rowiązanie szczególne (wartości symboliczne)

Aby uzyskać jednoznaczne rozwiązanie możemy np. zażądać aby rozwiązanie przechodziło przez zadany punkt $P(x_0, y_0)$:

In:=DSolve[{ y'[x] == Exp[x], y[x0] == y0 }, y[x], x]

Out = $\{\{y[x]->e^x - e^{x0} + y0\ \}\}$

Praktyczne wskazówki

- **NDSolve** daje wynik w postaci listy rozwiązań gdyż w niektórych przypadkach może ich być więcej niż 1
- znalezienie rozwiązania ogólnego a następnie nałożenie warunków jest zwykle bardziej skuteczne niż podanie warunków (np. początkowych) bezpośrednio w **DSolve**
- możliwe są dwa wywołania **DSolve**:
  1) **DSolve[rownanie, y[x],x]** – zwracane jest *wyrażenie* zawierające **x**!
  2) **DSolve[rownanie, y, x]** – zwracana jest *funkcja* której argument jest dowolny

Przykład: dwa wywołania DSolve

$$y'' = y^2$$

Rowiązanie I (uzyskujemy *wzór*)

In:=DSolve[y" [s] == y[s] , y[s], s]

`Out` = $\{\{\ y[s] \to e^s C[1] + e^{-s} C[2]\ \}\}$

In:= y[s] /. First[%]

`Out` = $e^s C[1] + e^{-s} C[2]$

Rowiązanie II (uzyskujemy *funkcję*)

In:=DSolve[y" [s] == y[s] , y, s]

`Out` = $\{\{\ y \to Function[\{s\}, e^s C[1] + e^{-s} C[2]]\ \}\}$

In := y /. %[[1]]

`Out` = $Function[\{s\}, e^s C[1] + e^{-s} C[2]]$

Przykład: zadanie war. pocz. ręcznie

Równanie $y'' = 6y^2$ z warunkami początkowymi
$y(0) = 0, y'(0) = 1$

Próbujemy rozwiązać problem w jednej linijce

In:=DSolve[{ $y''[s] == 6y[s]^2$, y[0]==0, y'[0]==0 } , y[s], s]
`Out = { }`

Drugie podejście

In:=DSolve[$y''[s] == 6y[s]^2$, y[s], s]
`Out =` $\{\ \{y[s] \to \mathit{WeierstrassP}[C[1] + s, \{0, C[2]\}]\ \}$
Znajdujemy C[1] i C[2] ręcznie:
(WeierstrassP.nb)

Przykład: układ r. różniczkowych

$$x'' = x + y', \qquad y'' = y - x'$$

Rozwiązanie u. równań

r1 = x''[t] == x[t] + y'[t]
r2 = y''[t] == y[t] - x'[t]
In:=DSolve[{r1,r2 }, { x[t],y[t] }, t]
`Out` = $\{\{\ x[t] \to e^{t/2} C[1] Cos[t/2] + e^{t/2} C[2] Sin[t/2],$
$y[t] \to -e^{t/2} C[1] Sin[t/2] + e^{t/2} C[2] Cos[t/2]\ \}\}$

Manipulowanie rozwiązaniami

Przykładowe rozwiązanie

Y = First[y[x] /. DSolve[y''[x] + y[x]==2 x, y[x], x]]

Out = $2(-1+x)+e^{-x}C[1]$

Narysowanie zbioru rozwiązań

Plot[Evaluate[Table[Y /. C[1] → p, { p, -1,1,0.1 }]] , {x, -3,3 }]

Animacja zbioru rozwiązań

Table[Plot[Y /. C[1] → p, {x, -3,3 }], { p, -1,1,0.1 }]

Manipulowanie rozwiązaniami (2)

Przykładowe rozwiązanie z war. pocz.

Z = First[y[x] /. DSolve[{ y''[x] + y[x]==2 x, y[0]==y0 }, y[x], x]]

```
Out =
```

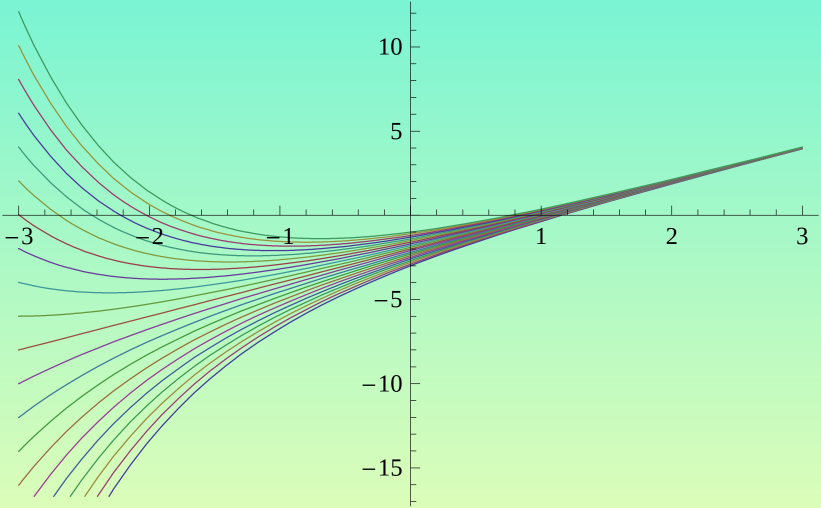
Narysowanie zbioru rozwiązań

Plot[Evaluate[Table[Z /. y0 → p, { p, -15,15 }]], {x, -3,3 }, PlotRange →{-10,10 }]

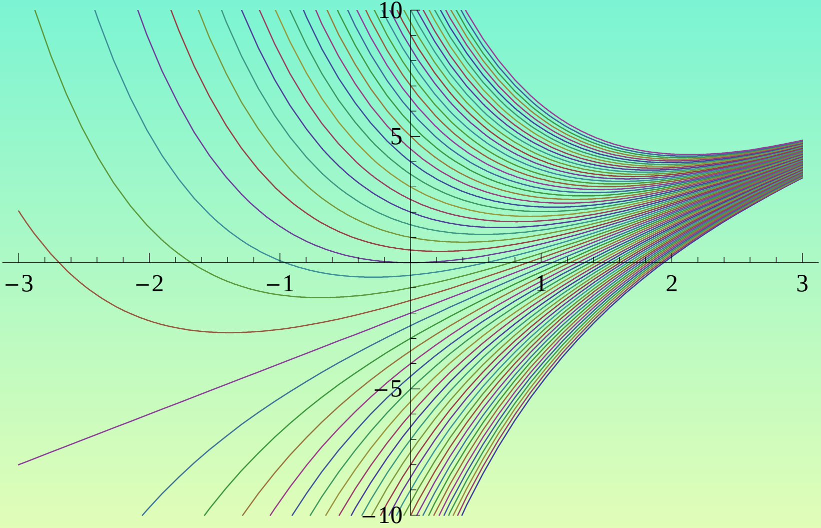
Animacja zbioru rozwiązań

Table[Plot[Z /. y0 → p, {x, -3,3 }, PlotRange →{-10,10}], { p, -1,1,0.1 }]

Rysunki z poprzednich przykładów



Rysunki z poprzednich przykładów



W poprzednich przkładach można zaobserwować, że dla pewnych wartości $C[1](y0)$ rozwiązanie wygląda na linię prostą. Sprawdzimy to.

In:= f[x_]:=a x +b

In:= y'[x]+y[x] == 2 x /. y→f

`Out = a + b +a x == 2 x`

Chcemy, żeby równanie powyżej było spełnione dla wszystkich x

(**ForAll**) **In:= Reduce[ForAll[x,%],{a,b }]**

`Out = a=2 && b=-2`

Uwaga

MATHEMATICA postawia *literalnie*, więc poniższe konstrukcje nie zadziałają tak jak w przykładzie powyżej:

y'[x] + y[x] == 2 x /. y → a x +b

y'[x] + y[x] == 2 x /. y[x] → a x + b

Przykład: równania dynamiki Newtona

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = m\mathbf{a}$$

gdzie:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Dla pojedynczego punktu materialnego jest to układ 3 równań:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F_x[x(t), y(t), z(t), t]$$
$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = F_y[x(t), y(t), z(t), t]$$
$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = F_z[x(t), y(t), z(t), t]$$

gdzie funkcje $x(t), y(t), z(t)$ określają położenie w układzie kartezjańskim.

Rzucone ciało jest poddane działaniu licznych sił. Jedną z nich jest przyciąganie grawitacyjne:

$$\mathbf{F_g} = m\mathbf{g}$$

Wybierając układ współrzędnych w którym oś z jest skierowana pionowo do góry mamy:

$$F_x = 0$$
$$F_y = 0$$
$$F_z = -mg$$

Warunki początkowe zadajemy następująco:

$$x(0) = 0, x^{'}(0) = v_0 \cos\alpha$$
$$y(0) = 0, y^{'}(0) = 0$$
$$z(0) = 0, z^{'}(0) = v_0 \sin\alpha$$

czyli rzut następuje w punkcie $(0, 0, 0)$ z prędkością v_0 pod kątem α do poziomu.

MATHEMATICA rozwiązuje układ równań bezproblemowo:

1. zapisujemy równania jako **eqX, eqY, eqZ**
   eqX = m x'[t] == 0
   eqY = m y''[t] == 0
   eqZ = m z''[t] == -m g
2. Układ równań stanowi zbiór pojedynczych równań:
   sys = {eqX, eqY, eqZ}
3. Podajemy warunki początkowe:
   ic={x[0] == 0, y[0] == 0, z[0] == 0,
   x'[0] == v0 Cos[α], y'[0] == 0, z'[0] == v0 Sin[α]}
4. Pełny opis problemu jest zawarty w sumie zbiorów zawierajacych równania i warunki początkowe: **Union[sys, ic]**
5. Dla wygody definiujemy jeszcze wektor położenia *r*:
   r = { x[t], y[t], z[t] }
6. Funkcja **DSolve** rozwiązuje zadany problem:
   trajektoria = DSolve[Union[sys, ic], r, t] i otrzymujemy znany wynik: `Out=` {{ x[t] $\rightarrow$ t v0 Cos[α], y[t] $\rightarrow$ 0, z[t] $\rightarrow$ 1/2 (-g t^2 + 2 t v0 Sin[α]) }}

Opór powietrza

Zakładamy, że siłę oporu powietrza można wyrazić jako:

$$\mathbf{F}_o = -k\mathbf{v}$$

Rozpisując to na składowe mamy:

$$F_x = -k\frac{dx(t)}{dt}$$
$$F_y = -k\frac{dy(t)}{dt}$$
$$F_z = -k\frac{dz(t)}{dt}$$

następnie dodajemy siłę oporu do siły przyciągania ziemskiego.

Układ równań różniczkowych z uwzględnieniem oporu powietrza

eqX = m x'[t] == -k x'[t]
eqY = m y''[t] == -k y'[t]
eqZ = m z''[t] == -m g - k z'[t]

Rozwiązujemy ten układ dokładne tak samo jak w poprzednim przypadku, i otrzymujemy nieco bardziej skomplikowane rozwiązanie:

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{e^{-\frac{k\,t}{m}}\left(-1+e^{\frac{k\,t}{m}}\right) m\,\mathrm{v0}\,\mathrm{Cos}[\alpha]}{k}, y[t] \to 0,\ z[t] \to -\frac{1}{k^2}\left(e^{-\frac{kt}{m}} m \left(g\,m - e^{\frac{k\,t}{m}} gm + e^{\frac{k\,t}{m}} g\,k\,t + \ k\,\mathrm{v0}\,\mathrm{Sin}[\alpha] - e^{\frac{k\,t}{m}} k\,\mathrm{v0}\,\mathrm{Sin}[\alpha]\right)\right)\right\}\right\}$$

Zmiana oporu z wysokością

Niech stała oporu powietrza k maleje z wysokoscią według wzoru:

$$ke^{-z/h_0}$$

Układ równań opisujący rzut (a raczej wystrzał ...) w takich warunkach to:

eqX = m x'[t] == -k Exp[-z[t]/h0] x'[t]
eqY = m y"[t] == -k Exp[-z[t]/h0] y'[t]
eqZ = m z"[t] == -m g - k Exp[-z[t]/h0] z'[t]

Niestety, **DSolve** nie poradzi sobie z tym problemem.
Możemy natomiast użyć metod numerycznych: **NDSolve** ...