Algebra Symboliczna

Wykład IV

Andrzej Odrzywolek

Instytut Fizyki, Zakład Teorii Względności i Astrofizyki

24.10.2007, środa, 13:15

Dane kontaktowe

dr Andrzej Odrzywołek

pokój 447, IV piętro

E-mail: `odrzywolek@th.if.uj.edu.pl`

Wykład: środy 13.15-15.00 s. 128

Ćwiczenia: piątki 10.30-12.00

Konsultacje: środy ∼11-13, czwartki 10-12

WWW: http://ribes.if.uj.edu.pl/alsymb/

Dygresja: operatory logiczne

- Koniunkcja (zachodzi A i B) **A && B**, **And[A,B]**
- Alternatywa (zachodzi A lub B) **A || B**, **Or[A,B]**
- Negacja (nie zachodzi A) **(!A)**, **Not[A]**
- Równość: **==**, nierówność **!=**
- Należy używać nawiasów np: **((!A)&&B) || B**, **Or[And[Not[A],B],B]**
- Inne operatory: **Nand, Xor, Nor, Implies, ...**

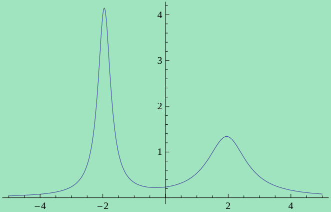
Uwagi

1. Wyrażenia logiczne można upraszczać np: **In:=Simplify[((!A)&&B) || B]** `Out = B`
2. `Aby założenie obowiązywało w całej sesji stosujemy` **`$Assumptions`**`, np:` **`$Assumptions = a>0`**

Całkowanie a liczby zespolone

Rozważmy funkcję wymierną:

$$w = \frac{4+2x+x^2}{17+2x-7x^2+x^4}$$



Kilka wyników całkowania:

- **In:=Integrate[w,x] // Simplify** `Out=ArcTan[`$\frac{1+x}{4-x^2}$`]`
- **`In:=Integrate[w,{x,0,t}]`**

```
Out=If[-2 <= Re[t] <= 2 || Im[t] != 0,
-ArcTan[1/4] + ArcTan[(1 + t)/(4 - t^2)],
Integrate[(t (4 + 2 x t + x^2 t^2))/( 17 + 2 x t
- 7 x^2 t^2 + x^4 t^4), x, 0, 1, Assumptions -> !
(-2 <= Re[t] <= 2 || Im[t] != 0)]]
```

Całkowanie a liczby zespolone c.d.

I jeszcze troche:

- **In:=Integrate[w, {x, -2, t}]**
  `Out=If[Im[t]^2/(2 + Re[t])^2 <= 1/4 && (Re[t] <= 2 || Im[t] != 0),`
  $ArcTan[\frac{(1+t)}{(4-t^2)}] + \frac{1}{2}i(Log[\frac{-i}{4(2+t)}] - Log[\frac{i}{4(2+t)}])$, ...
- **`In:=Integrate[w, {x, x1,x2 }]`**
  `Out = ...`

Uwagi

1. Wynik działania **F = Integrate[f,x]** na ogół oznacza tylko tyle, że **D[F,x]==f**
2. Całka jest obliczana w dziedzinie zespolonej
3. Całka oznaczona jest obliczana *po „prostym” odcinku* łączącym granice całkowania

Całkowanie a liczby zespolone c.d.

Uwagi

1. Dokładne zrozumienie zachowania się MATHEMATICI wymaga wiedzy z analizy zespolonej.
2. Wyniki analityczne należy konsultować z **NIntegrate**
3. Obliczenie całki po osi rzeczywistej może wymagać posklejania funkcji z kilku części obliczając całki oznaczone ze zmienną górną granicą
4. Pojęcie stałej całkowania traci sens; funkcje pierwotne mogą róznić się o funkcję kawałkami stałą

Całkowanie a liczby zespolone c.d.

Przykłady

- Plot[Evaluate[Integrate[w,x]],{x,-5,5}]
- Plot[Integrate[w, {x, 0, t}], {t, -5, 5}]
- Plot[NIntegrate[w, {x, 0, t}], {t, -5, 5}]
- Plot[Evaluate[Integrate[w, x] /. x → t] - NIntegrate[w, {x, 0, t}], {t, -5, 5}]
- Plot[ArcTan[5/3-t-t^2/3+t^3/3]+ArcTan[t-1],{t,-5,5}]

Całki o zespolonych granicach

Granice całkowania mogą być liczbami zespolonymi.
Rozważmy trzy funkcje zmiennej zespolonej:

$$f_1(z) = |z|^2, f_2(z) = z^2, f_3(z) = \frac{1}{\pi z}$$

i spróbujmy obliczyć całki (n=1,2,3):

$$\int_{z_1}^{z_2} f_n(z)\, dz$$

dla różnorodnych wartości granic całkowania z_1 i z_2 np:
Integrate[1/z, {z, -I, 1+I }]

$$\int_{-i}^{1+i} \frac{1}{z}\, dz$$

Obliczmy całki z naszych 3 funkcji po różnych drogach np:

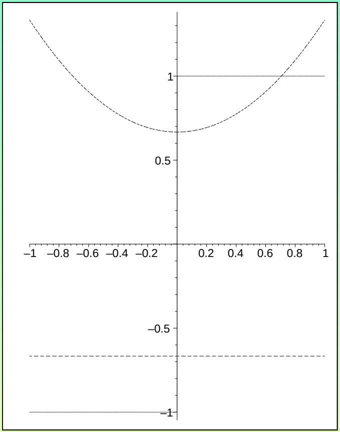
$$\int_{-i}^{\pm 1} f_n(z)\,dz + \int_{\pm 1}^{i} f_n(z), \qquad \int_{-i}^{i} f_n(z)\,dz$$

Możemy zaobserować, że nie zawsze:

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^c f(z)\,dz + \int_c^b f(z)\,dz$$

Bliższe przyjrzenie się pokazuje, że całka z z^2 nie zależy od drogi, całka z $|z|^2$ jest wyraźnie zależna od drogi, natomiast całka z $\frac{1}{\pi z}$ przyjmuje co najmniej dwie różne wartości.

Zdefiniujmy funkcje rzeczywistego parametru a:
$F_n(a) = \int_{-i}^{a} f_n(z)\, dz + \int_{a}^{i} f_n(z)\, dz$



1. $F_1(a) = \int_{-i}^{a} z^2\, dz + \int_{a}^{i} z^2\, dz$
   $F_1(a) = const$ – całka nie zależy od drogi (punktu pośredniego a)
2. $F_2(a) = \int_{-i}^{a} |z|^2\, dz + \int_{a}^{i} |z|^2\, dz$
   $F_2(a) \neq const$ – całka zależy od drogi w sposób ciagły
3. $F_3(a) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-i}^{a} \frac{1}{z}\, dz + \int_{a}^{i} \frac{1}{z}\, dz\right)$
   $F_3(a) = \pm 1$ – całka zależy od drogi i przyjmuje dwie wartości

Wyjaśnienie uzyskanych wyników

Szkolny błąd:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = (-1) - (1) = -2$$

Całka z zawsze dodatniej funkcji wychodzi ujemna!
MATHEMATICA nie popełni tego błędu:
***Integrate*[1/x², {x, −1, 1}]**

`Integrate::"idiv" Integral of` $1/x^2$
does not converge `on` $\{-1, 1\}$.

Czemu nie liczy prostej całki nieoznaczonej:

$$\int |z|\, dz$$

In:=Integrate[Abs[z],z]
`Out =` $\int Abs[z] dz$

Wyjaśnienie uzyskanych wyników

1. W istocie całka z $|z|$ zależy od drogi całkowania i pojęcie funkcji pierwotnej w zwykłym sensie nie istnieje.
2. W szczególności nie istnieje funkcja zmiennej zespolonej z która po zróżniczkowaniu da nam $|z|$.

Uwaga!

Jednoznaczną wartość całki oznaczonej z dowolnej funkcji zespolonej uzyskujemy w MATHEMATICE dzięki domyślnemu założeniu o prostoliniowej drodze łączącej punkty będące granicami całkowania.

Rysowanie wykresów a rozwiązywanie równań

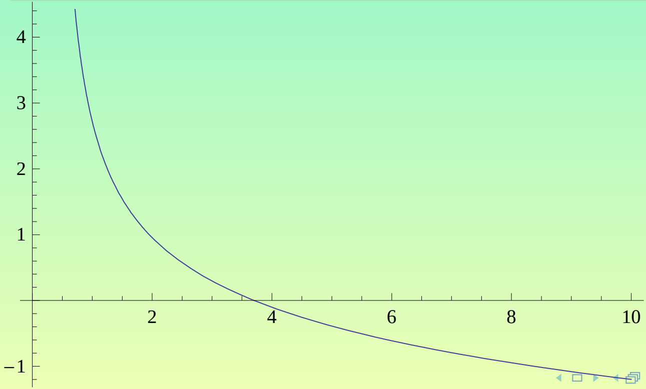
Narysowanie wykresu funkcji *jest* formą rozwiązania równania!

- Równanie $f(x) = 0$: Przecięcia wykresu funkcji $f(x)$ z osią poziomą *są rozwiazaniami równania*
- Równanie $g(x) = h(x)$: Przecięcia wykresu funkcji $g(x)$ z wykresem f. $h(x)$ *są rozwiązaniami równania*
- Układ równań $u(x, y) = 0, v(x, y) = 0$: Przecięcia wykresów funkcji uwikłanych (ang. implicit function) $u(x, y)$ i $v(x, y)$ dają rozwiązania układu równań
- Układ równań: $z = G(x, y), x = X(t), y = Y(t), z = Z(t)$: Przecięcie krzywej 3D $X(t), Y(t), Z(t)$ z powierzchnią $z = G(x, y)$ jest rozwiazaniem układu
- Podobne przykłady można monożyć
- Użycie animacji, grafiki 3D i kolorów pozwala analizować układy równań aż do pięciu wymiarów (pieciu zmiennych niewiadomych)

Przykład: $e^x - \log x = 0$

Rozwiazanie równania metodą graficzną

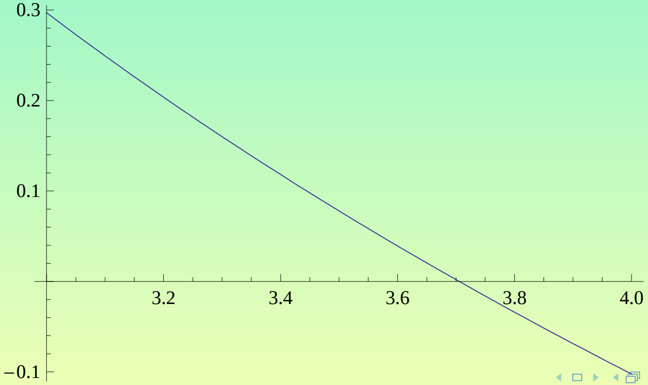
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 0, 10}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3, 4}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.6, 3.8}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.70, 3.71}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3.704, 3.706}]



Przykład: $e^x - \log x = 0$

Rozwiazanie równania metodą graficzną

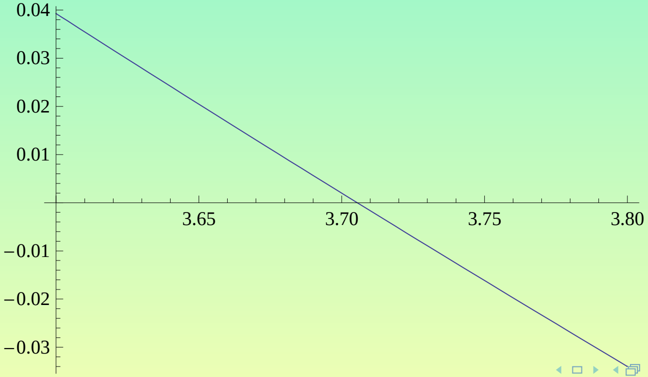
```
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 0, 10}]
```
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3, 4}]
```
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.6, 3.8}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.70, 3.71}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3.704, 3.706}]
```



Przykład: $e^x - \log x = 0$

Rozwiazanie równania metodą graficzną

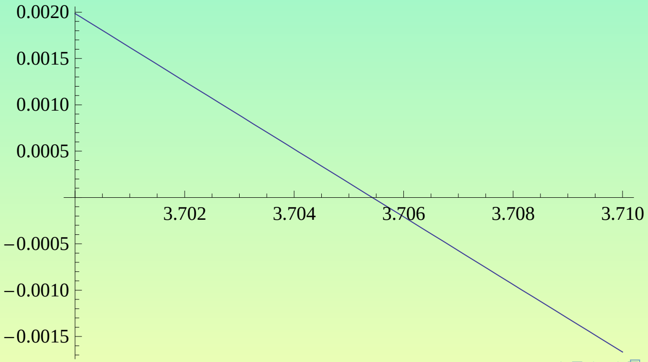
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 0, 10}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3, 4}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.6, 3.8}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.70, 3.71}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3.704, 3.706}]



Przykład: $e^x - \log x = 0$

Rozwiazanie równania metodą graficzną

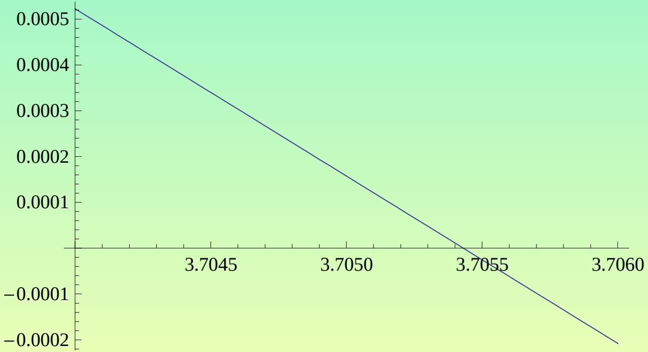
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 0, 10}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3, 4}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.6, 3.8}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.70, 3.71}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3.704, 3.706}]



Przykład: $e^x - \log x = 0$

Rozwiazanie równania metodą graficzną

```
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 0, 10}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3, 4}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.6, 3.8}]
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x,3.70, 3.71}]
```
Plot[Exp[1/x] - Log[x], {x, 3.704, 3.706}]



Użycie animacji

Dla jakiej wartości $n > 1$ równanie:

$$\mathrm{sgn} x |x|^{1/n} = |x|^x - 17/12$$

posiada 3 rozwiązania rzeczywiste?

Rozwiazanie równania metodą graficzną

Table[Plot[{Sign[x] Abs[x]^(1/n), Abs[x]^x - 17/12}, {x, -10, 3}, PlotLabel → n], {n, 1, 5, 0.2}]

Uwagi

1. Podobnie jak w poprzednim przypadku możemy zawężać zakres animacji lub/i zwiększać ilość klatek uzyskując teoretycznie dowolnie wysoką dokładność
2. Tak uzyskaną liczby można wykorzystać jako dane startowe do np. **FindRoot**
3. Często wartość graniczna może być obliczona analitycznie

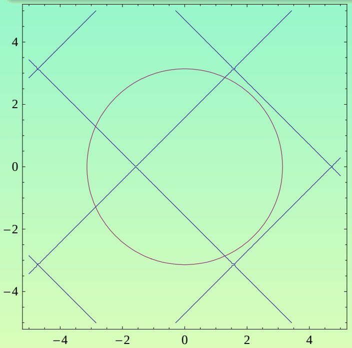
Układy równań

Rozwiązanie graficzne układu równań

$\sin x + \cos y = 0$

$x^2 + y^2 = \pi^2$

ImplicitPlot[{Sin[x]+Cos[y]==0,x^2+y^2==Pi^2},{x,-5,5},{y,-5,5}]



Uwaga

W wersji 6.0 **ImplicitPlot** zastępuje po prostu **ContourPlot**

Układy równań c.d.

Uwaga

1. Jest mało prawdopodobne, aby znalezienie analitycznego rozwiązania skomplikowanego układu równań powiodło sie bez zastosowania wcześniej metody graficznej!
2. W szczególnosci rozwiązanie symboliczne może nie istnieć

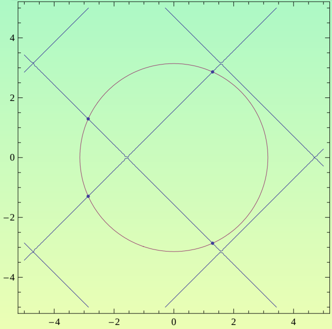
Rozwiązanie analityczne układu równań

```
sys = {Sin[x] + Cos[y] == 0, x^2 + y^2 == Pi^2 }
sol = Reduce[sys , {x, y}]
sol /. C[1] → 0
Refine[%, x ∈ Reals]
Reduce[%, {x, y}]
{ToRules[%]}
wynik = {x, y} /. %
rozw = ListPlot[wynik]
```

Układy równań c.d.

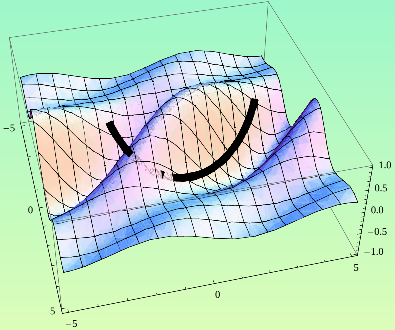
Wynik analityczny:

$$\{\ \{1/4(-\pi-\sqrt{7}\pi), -1/2\sqrt{1/2(4\pi^2-\sqrt{7}\pi^2)}\},$$
$$\{1/4(-\pi-\sqrt{7}\pi), 1/2\sqrt{1/2(4\pi^2-\sqrt{7}\pi^2)}\},$$
$$\{1/4(-\pi+\sqrt{7}\pi), -1/2\sqrt{1/2(4\pi^2+\sqrt{7}\pi^2)}\},$$
$$\{1/4(-\pi+\sqrt{7}\pi), 1/2\sqrt{1/2(4\pi^2+\sqrt{7}\pi^2)}\}\}$$



Przecięcie krzywej z powierzchnią

```
wykr1 = Plot3D[Sin[x]/x*Cos[x + y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
wykr2 = ParametricPlot3D[{2 Cos[t], 3 Sin[t], t^2}, {t, -10, 10},
AspectRatio → 1, PlotStyle → {Thickness → 0.02}]
```



Pakiet Graphics

Liczne interesujące typy wykresów oraz komendy graficzne można znaleźć w pakiecie GRAPHICS.

Ładujemy go w następujący sposób:

wszystkie dostępne funkcje: **«Graphics‘**

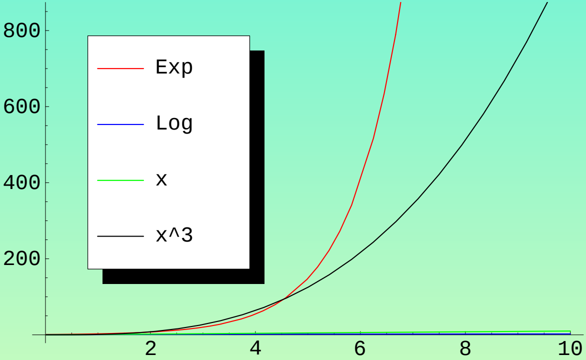
Warte uwagi instrukcje:

- PolarPlot
- ImplicitPlot
- LogPlot
- LogLogPlot
- Animate

Uwaga!

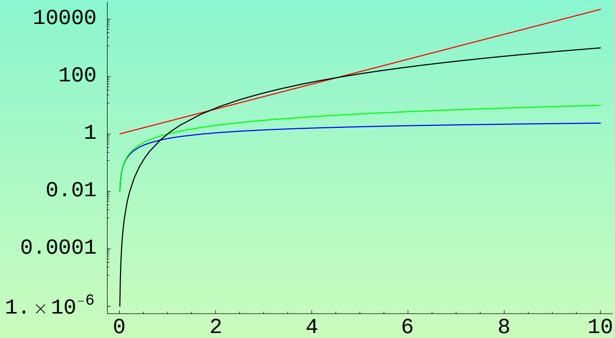
1. W celu interaktywnej pracy na „dobrym” komputerze musimy zawsze ładować go już na samym początku pracy.
2. W wersji 6.0 wszystkie f. graficzne są wbudowane

Zastosowanie wykresów logarytmicznych



Plot[{Exp[x], Log[x + 1], x, x^3 }, {x, 0.01, 10 },
PlotStyle → {{Red}, {Blue}, {Green}, {Black}},
PlotLegend → {"Exp", "Log", "x", "x^3" },
LegendPosition → {-0.7, -0.3}]

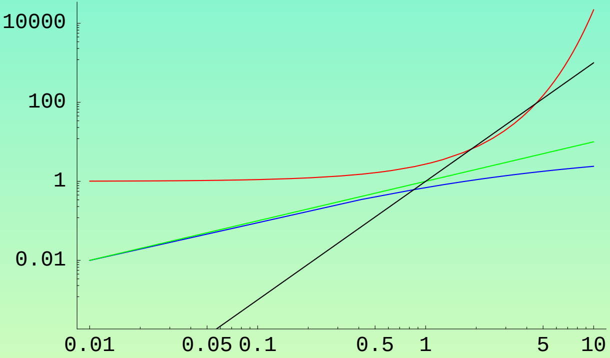
LogPlot[{Exp[x], Log[x + 1], x, x^3 }, {x, 0.01, 10 }, PlotStyle → {{Red}, {Blue}, {Green}, {Black}}]



Na wykresie LogPlot funkcje wykładnicze (np. $e^x \equiv \exp x$) są linią prostą.

Zastosowanie wykresów logarytmicznych c.d.

Plot[{ Exp[x], Log[x + 1], x, x^3 }, {x, 0.01, 10 }, PlotStyle → {{Red}, {Blue}, {Green}, {Black}}]



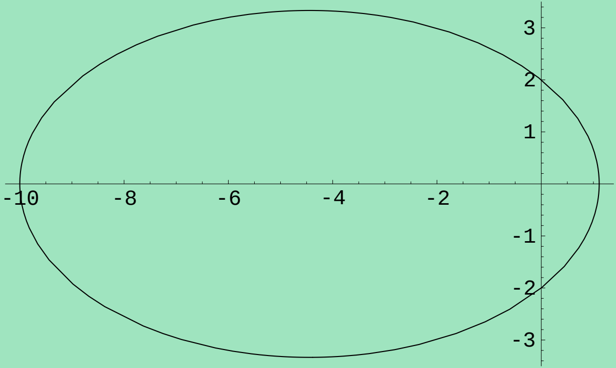
Na wykresie LogLogPlot funkcja potęgowe (np. x, x^3) jest linią prostą.

We współrzędnych biegunowych (r, ϕ) równanie:

$$r = \frac{p}{1 + e \ \cos\phi}$$

opisuje elipsę.

PolarPlot[2 / (1 + 0.8 Cos[phi]), { phi, 0, 2 Pi }]



Funkcje uwikłane

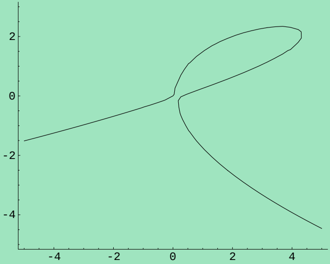
F. zadane w postaci pewnego równania:

$$F(x, y) = 0$$

rysujemy komendą **ImplicitPlot** (**ContourPlot** w wer. 6.0)

Przykład

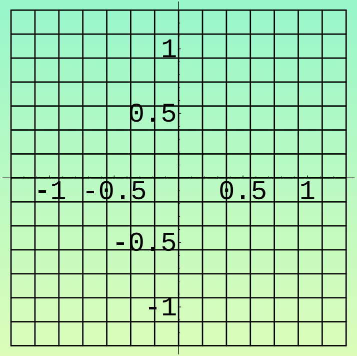
ImplicitPlot$[x^2 + y^3 == 3xy + (x - y)/3, \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 3\}]$

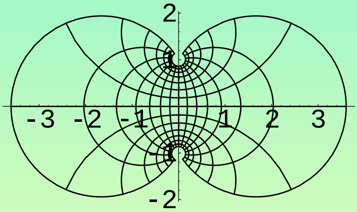


Przekształcenie konforemne

Przekształcenie płaszczyzny zespolonej poprzez $\mathrm{tg}\, z$

CartesianMap[Tan, {-1.3, 1.3}, {-1.3, 1.3}]





Tworzenie animacji

Jeżeli chcemy wygenerować animację na ekranie używamy **Animate**:

Animate[Plot[FresnelS[2Cos[a] x], {x, -3, 3}, PlotRange → {-1, 1}], {a, 0, 2 Pi }]

Jeżeli chcemy zapisać animację w formacie np. AVI lepiej stworzyć tablicę wykresów:

Table[Plot[FresnelS[2Cos[a] x], {x, -3, 3}, PlotRange → {-1, 1}], {a, 0, 2 Pi, 0.2}];

którą możemy łatwo zapisać do pliku:

Export["/home/andrzej/Fresnel.avi", %]

Uwaga!

Metoda ta nadaje się do tworzenia bardzo prostych i niewielkich animacji. Szybko brakuje pamięci lub miejsca na dysku.

Generowanie klatek

Pętla generująca klatki animacji

```
For[j = 1, j < 100, j = j + 1,
    t = j/100;
    frame =
    Plot[Sin[x + t], {x, -2 Pi, 2 Pi}, DisplayFunction → Identity ];
    Export["frames/frame@" <> ToString[ j + 1000000] <>
    ".png", frame, ImageResolution → 150, ImageSize → 600]
]
```

Uwaga!

1. Dodajemy dużą liczbę do numeru klatki dla wygody
2. Opcja **DisplayFunction → Identity** zapobiega wyświetlaniu klatek: są zapisywane wyłacznie na dysku, a nie w pamięci.
3. Ilość klatek, ich format oraz rozdzielczość są praktycznie nieograniczone