Algebra Symboliczna

Wykład XI

Andrzej Odrzywolek

Instytut Fizyki, Zakład Teorii Względności i Astrofizyki

09.01.2008, środa, 13:15

Dane kontaktowe

dr Andrzej Odrzywołek

pokój 447, IV piętro

E-mail: `odrzywolek@th.if.uj.edu.pl`

Wykład: środy 13.15-15.00 s. 128

Ćwiczenia: piątki 10.30-12.00

Konsultacje: środy ∼11-13, czwartki 10-12

WWW: http://ribes.if.uj.edu.pl/alsymb/

Pole wektorowe

Funkcję przyjmującą wartości wektorowe, czyli *trzy* funkcje (uporządkowane) trzech zmiennych dla przestrzeni trójwymiarowej nazywamy polem wektorowym. Jest to bardzo często stosowany opis w fizyce np:

1. pole magnetyczne
   $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}(x, y, z) \equiv \{B_x(x, y, z), B_y(x, y, z), B_z(x, y, z)\}$
2. pole elektrostatyczne $\mathbf{E}(x, y, z)$
3. potencjał wektorowy pola elektromagnetycznego $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$
4. pole prędkosci płynu $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$

W Mathematice zapiszemy pole wektorowe jako np:
B= { Bx[x,y,z], By[x,y,z], Bz[x,y,z] }

Analiza wektorowa w 3D: pole skalarne

Pole skalarne

Funkcję przyjmującą wartości skalarne, czyli *jedną* funkcję trzech zmiennych dla przestrzeni trójwymiarowej nazywamy polem skalarnym. Faktycznie jest niemal synonim funkcji trzech zmiennych. W fizyce opisujemy w ten sposób np:

1. rozkład temperatury $T(\mathbf{r}) \equiv T(x, y, z)$
2. potencjał grawitacyjny $\phi(x, y, z)$
3. rozkład gęstości np: masy $\rho(\mathbf{r}, t)$
4. pole ciśnienia płynu $p(\mathbf{r}, t)$

W Mathematice zapiszemy pole skalarne jako np:

p = P[x,y,z]

Analiza wektorowa w 3D: układy współrzędnych

Układy współrzędnych

Pola wektorowe i skalarne *bardzo często* (prawie zawsze) opisujemy w krzywoliniowych układach współrzędnych np:

1. współrzędne cylindryczne (r, ϕ, z) **Cylindrical[r, ϕ, z]**
2. współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) **Spherical[r, θ, ϕ]**
3. ...

Umiejetność dobrania właściwego dla problemu układu współrzędnych jest kluczowa przy rozwiązywaniu problemów fizycznych.

- potencjał grawitacyjny masy punktowej we wsp. sferycznych to $\phi = -GM/r$
- pole wektorowe jednostajnie obracającej się cieczy we wsp. cylindrycznych to $\mathbf{v} = \Omega\, r\, \mathbf{e}_\phi \equiv \{0, \Omega r, 0\}$

Analiza wektorowa w 3D: podstawowe operacje algebraiczne

Operacje algebraiczne

- iloczyn skalarny dwóch pól wektorowych produkuje pole skalarne: $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r})$ W MATHEMATICE:
  V = { Vx[x,y,z],Vy[x,y,z],Vz[x,y,z] }
  phi = Dot[V,V]
- iloczyn wektorowy dwóch pól wektorowych produkuje pole wektorowe: $\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) \times \mathbf{U}(\mathbf{r})$ W MATHEMATICE:
  U = { Ux[x,y,z],Uy[x,y,z],Uz[x,y,z] }
  W = Cross[V,U]

Uwaga!!!

Pakiet **VectorAnalysis** udostępnia funkcje **DotProduct** i **CrossProduct**. *Nie należy ich używać !!!* Nie mają sensu dla pól wektorowych w bazach ortonormalnych. Należy stosować **Dot** i **Cross**.

Analiza wektorowa w 3D: podstawowe operacje różniczkowe

Operatory różniczkowe

- dywergencja (ang. *divergence*) jest operatorem różniczkowym który przekształca pole wektorowe w skalarne
- gradient (ang. *gradient*) jest operatorem różniczkowym który przekształca pole skalarne w wektorowe
- rotacja (ang. *curl*) jest operatorem różniczkowym który przekształca pole wektorowe w wektorowe
- operator Laplace'a (ang. *laplacian*) jest operatorem różniczkowym który przekształca pole skalarne w skalarne (lub wektorowe w wektorowe, działając po kolei na trzy składowe wektora)

Analiza wektorowa w 3D: gradient

Gradient we współrzędnych prostokątnych (kartezjańskich)

Wektor o współrzędych:

$$\mathbf{V} = \left\{ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right\}$$

nazywamy *gradientem* pola skalarnego (tzn. funkcji 3 zmiennych) $f(\mathbf{r}) \equiv f(x,y,z)$. Równoważny zapis to:

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad} f \equiv \nabla f$$

Nabla (ang. *del*)

W rachunkach ręcznych i notacji tradycyjnej bardzo często stosuje się operator ∇, zdefiniowany jako wektor o składowych:

$$\nabla \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Analiza wektorowa w 3D: gradient w MATHEMATICE

Pakiet **VectorAnalysis**

Obliczenia w różnych układach współrzędnych ułatwia pakiet: **«VectorAnalysis‘**

Gradient obliczamy funkcją **Grad**:

$\boldsymbol{Grad[f[r,\theta,\phi], Spherical[r,\theta,\phi]]}$ w wyniku otrzymujemy (dla przykładu) wzór na działanie operatora gradientu na dowolną funkcję we współrzędnych sferycznych:

`Out =`

$$\left\{(f^{(1,0,0)})[r,\theta,\phi]], (f^{(0,1,0)})[r,\theta,\phi]/r, (Csc[\theta](f^{(0,0,1)})[r,\theta,\phi]])/r\right\}$$

Otrzymujemy dobrze znany (?) rezultat:

http://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates

$$\nabla f(r,\theta,\phi) = \left\{\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{r\,\partial\theta}, \frac{\partial f}{r\,\sin\theta\partial\phi}\right\}$$

Analiza wektorowa w 3D: dywergencja

Dywergencja we współrzędnych prostokątnych (kartezjańskich)

Pole skalarne (funkcję):

$$g(x, y, z) = \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial z}$$

nazywamy *dywergencją* pola wektorowego $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. Równoważny zapis to:

$$g = \mathrm{div}\mathbf{V} \equiv \nabla\mathbf{V}$$

W MATHEMATICE obliczamy ją poleceniem **Div** np:

In:=Div[{ x, y, z }, Cartesian[x, y, z]]

```
Out = 3
```

Div[{r, 0, 0}, Spherical[r, θ, ϕ]]

```
Out = 3
```

Wynik ilustruje twierdzenie mówiące, że $\mathrm{div}\,\mathbf{r} = n$, gdzie n to wymiar przestrzeni.

Analiza wektorowa w 3D: rotacja

Rotacja we współrzędnych prostokątnych (kartezjańskich)

Pole wektorowe $\mathbf{W}(x, y, z)$ określone jednym ze wzorów z Zad. 1 nazywamy *rotacją* pola wektorowego $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. Zapisujemy to jako:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot}\mathbf{V} \equiv \nabla \times \mathbf{V}$$

W MATHEMATICE obliczamy ją poleceniem **Curl** np. dla pola prędkości cieczy obracającej się z prędkością kątową Ω:

In:=Curl[{ 0, Ω r, 0 }, Cylindrical[r, ϕ, z]]

`Out = { 0, 0, 2 Ω }`

In:= Curl[{ -Ω y, Ω x, 0 }, Cartesian[x, y, z]]

`Out = { 0, 0, 2 Ω }`

Wynik pokazuje, że $\frac{1}{2}\mathbf{rot}\,\mathbf{V}$ to faktycznie lokalna prędkość rotacji pola $\mathbf{V}$ – z taką prędkością kątową będzie obracał się np. wrzucony do wody patyk.

Analiza wektorowa w 3D: laplasjan

Laplacian we współrzędnych prostokątnych (kartezjańskich)

Pole skalarne $h(x, y, z)$ określone w następujący sposób:

$$h(x, y, z) = \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial z^2}$$

nazywamy *laplacianem* pola skalarnego $V(\mathbf{r})$. Zapisujemy to jako:

$$h(\mathbf{r}) = \nabla^2 V \equiv \Delta V$$

W MATHEMATICE obliczamy go poleceniem **Laplacian** np:

V = Re[Log[Sin[(x + I y)^3]]]

Laplacian[V,Cartesian[x,y,z]]

Simplify[%]

`Out = 0`

Laplacian części rzeczywistej (lub urojonej) dowolnej funkcji zespolonej wynosi zero.

Analiza wektorowa w 3D: potencjały

Potencjał skalarny

Jeżeli pole wektorowe **V** jest *bezwirowe*, czyli:

$\mathbf{rot}\,(\mathbf{V}) = 0$

to zwykle istnieje potencjał skalarny $\phi(\mathbf{r})$, taki że:

$\mathbf{V} = \mathrm{grad}\phi$

Potencjał wektorowy

Jeżeli pole wektorowe **V** jest *bezźródłowe*, czyli:

$\mathrm{div}\,(\mathbf{V}) = 0$

to zwykle istnieje potencjał wektorowy $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, taki że:

$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$

Niestety, MATHEMATICA nie oblicza ich bezpośrednio, należy wyznaczyć go korzystając np. z **DSolve**

Przykład

Natężenie pola grawitacyjnego (przyspieszenie grawitacyjne) w otoczeniu masy M wynosi:

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r$$

Szukamy potencjału grawitacyjnego V we współrzędnych sferycznych: **grad = Grad[V[r,θ,ϕ],Spherical[r,θ,ϕ]]**
Rozwiązujemy pierwsze równanie różniczkowe wynikające z równości $\mathbf{g} = \mathrm{grad}\, V$:
DSolve[grad[[1]] == -G M/r^2, v, {r, θ, ϕ}]

Out = {{ v $\to$ Function[{ r, θ, ϕ }, (G M)/r + C[1][θ, ϕ] }}

Wstawienie wyniku do 2 i 3 równania pokazuje, że funkcja $C[1]$ musi być stałą: **In: = grad /. %[[1]]**

Out = $\left\{-\frac{GM}{r^2}, \frac{C[1]^{(1,0)}[\theta,\phi]}{r}, \frac{\mathtt{Csc}[\theta]C[1]^{(0,1)}[\theta,\phi]}{r}\right\}$

Równanie równowagi ciekłego kryształu ma postać:

$$\mathbf{H} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})$$

gdzie *pole molekularne* H to:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = K_1 \nabla \mathrm{div} \mathbf{n} - \\ K_2 \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\ \mathbf{n}) \mathrm{rot}\ \mathbf{n} + \nabla \times \left[(\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\ \mathbf{n}) \mathbf{n} \right] \right\} + \\ K_3 \left\{ (\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\ \mathbf{n}) \times \mathrm{rot}\ \mathbf{n} + \nabla \times \left[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\ \mathbf{n}) \right] \right\} \end{aligned}$$

K_i – pewne stałe. Rozważmy ciekły kryształ wypełniający długą rurkę. Musimy obliczyć powyższe wyrażenia we współrzędnych cylindrycznych.

Skomplikowany przykład: ciekły kryształ (2)

Obliczenia w MATHEMATICE

```
« VectorAnalysis‘
SetCoordinates[Cylindrical[r, φ, z]]
n = {Sin[f[r]],0,Cos[f[r]] }
H = K1 Grad[Div[n]] - K2 (n.Curl[n] Curl[n] + Curl[n.Curl[n] n]) +
 K3 (Cross[Cross[n, Curl[n]], Curl[n]] + Curl[Cross[n, Cross[n, Curl[n]]]])
 H - n n.H
%[[1]] //Simplify
```

$$-\frac{1}{2r^2}\mathtt{Cos}[f[r]](\mathtt{K1Sin}[2f[r]] - r(\mathtt{K1}+\mathtt{K3}+(\mathtt{K1}-\mathtt{K3})\mathtt{Cos}[2f[r]])f'[r]$$
$$+(\mathtt{K1}-\mathtt{K3})r^2\mathtt{Sin}[2f[r]]f'[r]^2 - r^2(\mathtt{K1}+\mathtt{K3}+(\mathtt{K1}-\mathtt{K3})\mathtt{Cos}[2f[r]])f''[r])$$

Otrzymujemy równanie, które należy rozwiązać. Jest ono zaskakująco proste, biorąc pod uwagę równania wyjściowe.