Algebra Symboliczna

Wykład X

Andrzej Odrzywolek

Instytut Fizyki, Zakład Teorii Względności i Astrofizyki

19.12.2007, środa, 13:15

Dane kontaktowe

dr Andrzej Odrzywołek

pokój 447, IV piętro

E-mail: `odrzywolek@th.if.uj.edu.pl`

Wykład: środy 13.15-15.00 s. 128

Ćwiczenia: piątki 10.30-12.00

Konsultacje: środy ∼11-13, czwartki 10-12

WWW: http://ribes.if.uj.edu.pl/alsymb/

Wartości i wektory własne

Definicja wartości własnych

Dla dowolnej macierzy kwadratowej $\mathcal{A}$ $(N \times N)$ *równaniem własnym* nazywamy:

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$$

gdzie **U** jest N-elementowym wektorem, natomiast λ - liczbą. Wektor będący rozwiązaniem powyższego równania dla pewnej wartości λ nazywamy *wektorem własnym*. Na ogół rozwiazanie istnieje tylko dla pewnych wybranych wartości λ które nazywamy *wartościami własnymi*. Rozwiazanie opisanego wyżej problemu jest jednym z podstawowych problemów algebry i ma ogromna ilość zastosowań, m. in. w fizyce oraz metodach numerycznych.

Wartości i wektory własne: bardzo prosty przykład

Dana jest macierz 2x2 dla której należy obliczyć wektory i wartości własne:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **P = {{1,2},{2,1}}**
2. **V = { V1, V2 }**
3. **Solve** znajduje tylko trywialne rozwiązanie zerowe:
   Solve[P.V == λ V, V]
   Out = $\{\{$V1 $\rightarrow$ 0, V2 $\rightarrow$ 0 $\}\}$
4. **Reduce** znajduje rozwiązanie: **Reduce[P.V == λ V, V]**
   ((λ == -1 || λ == 3) && V2 == 1/2 (-V1 + V1 λ))
   || (-3 - 2 λ + λ^2 != 0 && V1 == 0 && V2 == 0)

1. **Solve** znajduje rozwiązania po podaniu wartości własnych:
   Solve[P.V == -1 V, V]
   `Out = {{V1 → -V2 }}`
   Solve[P.V == 3 V, V]
   `Out = {{V1 → V2 }}`

Ostatecznie, rozwiązanie zagadnienia własnego to:

$$(1)\ \lambda_1 = -1, \mathbf{V} = \mathit{const}\{1, -1\} \quad (2)\ \lambda_1 = 3, \mathbf{V} = \mathit{const}\{1, 1\}$$

Wektory własne zawsze można pomnozyć przez dowolną stałą, ich długośc nie jest określona. Czasem potrzebujemy wektorów własnych o ustalonej długości np. 1, mówimy wtedy o wektorach *znormalizowanych*, które otrzymujemy dzieląc wektor **V** przez jego długość **Sqrt[V.V]**:
Vnorm = V/ Sqrt[V.V]

Wartości i wektory własne: bardzo prosty przykład c.d.n.

Użycie wbudowanych funkcji

Zagadnienie własne mozna rozwiazać używając funkcji **Eigenvalues** oraz **Eigenvectors**.

1. Wartości własne:
   Eigenvalues[P]
   `Out = {{ 3, -1 }}`
2. Wektory własne:
   Eigenvectors[P]
   `Out = {{ 1 , 1 }, { -1 , 1 }}`
3. Równoczesnie wart. i wekt. własne:
   Eigensystem[P]
   `Out = {{3, -1}, {{1, 1}, {-1, 1}}`

Wartości i wektory własne: przykład

Macierz o losowo wygenerowanych elementach

- Ustalamy wymiar macierzy:
  num=7
- Wypełniamy całkowitymi liczbami losowymi z przedziału (-2,2):
  A = Table[RandomInteger[-2, 2], {ii, 1, num}, {jj, 1, num}]
- Obliczamy wektory własne:
  wekt = Eigenvectors[A]
- i wartości własne:
  wart = Eigenvalues[A]
- sprawdzamy wyniki:
  Table[A.wekt[[ii]] - wart[[ii]] wekt[[ii]], ii, 1, num] // Simplify

Uwaga

1. stopień komplikacji wyrażeń analitycznych rośnie bardzo szybko z wymiarem macierzy: należy wtedy przejść do obliczeń numerycznych (podać elementy macierzy w postaci zmiennoprzecinkowej)
2. dla typowych macierzy (nieosobliwych) mamy tyle różnych wartości własnych ile wynosi wymiar macierzy; są one na ogół zespolone nawet jezeli macierz jest rzeczywista

Wartości i wektory własne: przykład zastosowania

Własności macierzy diagonalnych

Dla postaci diagonalnej szczególnie łatwo możemy obliczyć wartość funkcji np:

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} \equiv \begin{pmatrix} e_1^{\lambda} & 0 \\ 0 & e_2^{\lambda} \end{pmatrix}$$

Powyższe zachodzi dla dowolnej funkcji od macierzy posiadającej wartości własne – możemy w ten sposób zdefiniować co rozumiemy przez pojęcie funkcji której argumentem jest macierz. Bardziej ogólna jest jednak definicja przez szereg potęgowy, bo macierz nie musi posiadać wart. własnych. Definicje te są zgodne ze sobą.

Wartości i wektory własne: przykład zastosowania

Rozważmy trzy wyrażenia które chcemy obliczyć, dla wcześniej rozważanej macierzy P:

$$e^P, \quad \sin P, \quad \ln P$$

1. Aby obliczyć e^P możemy użyć po prostu:
   MatrixExp[P]
2. Aby obliczyć $\sin P$ możemy skorzystać z tożsamości:
   (MatrixExp[I P] - MatrixExp[-I P]) /2/I
   lub szeregu potęgowego:
   szereg = $(-1)^n$ MatrixPower[P, 2 n + 1]/(2 n + 1)!
   Table[Sum[szereg[[ii, jj]], {n, 0, Infinity}], {ii, 1, 2}, {jj, 1, 2}]

Wartości i wektory własne: przykład zastosowania

Wszystkie trzy wyrażenia:

$$e^P, \quad \sin P, \quad \ln P$$

można obliczyć poprzez diagonalizację macierzy P:

1. dokonujemy dekompozycji macierzy P :
   {U,Diag} = JordanDecomposition[P]
   gdzie macierz U składa się z wektorów własnych, natomiast macierz Diag ma na przekątnej wartości własne. Zachodzi tożsamość:
   Inverse[U].Diag .U == P
   `Out = True`
   oraz:
   Diag == U.P.Inverse[U]
   `Out = True`
2. Aby obliczyć e^P

Wartości i wektory własne: przykład zastosowania

1. Aby obliczyć sin P obliczamy sinusy wartości własnych i dokonujemy transformacji odwrotnej (do diagonalizacji) macierzą U:
   U . { {Sin[-1], 0 }, {0, Sin[3]}} .Inverse[U]
   Łatwo sprawdzić, że wynik jest identyczny z dwoma poprzednimi.
2. obliczenie logarytmu macierzy P jest możliwe w postaci zdiagonalizowanej:
   lgP = U .{{Log[-1], 0}, {0, Log[3]}} .Inverse[U]
   MatrixExp[lgP]
   `Out = {{1, 2}, {2, 1}}`

Transformacje macierzowe

Wyżej poznaliśmy kilka przykładów *transformacji macierzowych* $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^{'}$ typu:

$$\mathbf{A}^{'} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}$$

gdzie $\mathbf{U}$ jest macierzą ($\det(\mathbf{U}) \neq 0$) opisującą przekształcenie macierzy $\mathbf{A}$. Pamiętając że $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I}$ widzimy że transformacja odwrotna $\mathbf{A}^{'} \rightarrow \mathbf{A}$ to:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

Tego typu przekształcenia *podobieństwa* są używane w wielu działach fizyki np. relatywistycznej mechanice kwantowej gdyż opisują symetrie układu.