

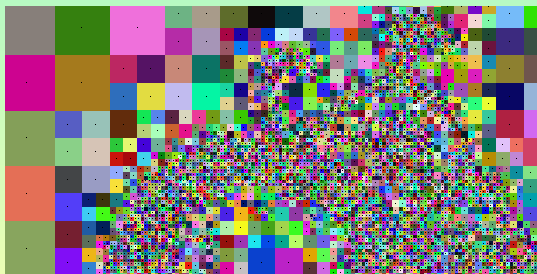
# Algebra Symboliczna

## Wykład I

Andrzej Odrzywółek

Instytut Fizyki, Zakład Teorii Względności i Astrofizyki

03.10.2007, środa, 13:15



dr Andrzej Odrzywołek

*pokój 447, IV piętro*

E-mail: [odrzywolek@th.if.uj.edu.pl](mailto:odrzywolek@th.if.uj.edu.pl)

Wykład: środy 13.15-15.00 s. 128

Ćwiczenia: piątki 10.30-12.00

Konsultacje: środy ~11-13, czwartki 10-12

WWW: <http://ribes.if.uj.edu.pl/alsymb/>

# Co to jest Algebra symboliczna?

- Software pozwalający zastąpić człowieka w trakcie możliwych do algorytmizacji i tabelaryzowania operacji matematycznych
- Dotyczy to np. obliczania całki nieoznaczonej, rozwiązywania równania różniczkowego lub algebraicznego, obliczenia wyznacznika macierzy itp.
- Operacje te są wykonywane *symbolicznie(!)* tj. tak jak robi to student na ćwiczeniach z algebry/analizy
- Zwykle metody symboliczne są łączone z tradycyjnymi metodami numerycznymi
- Poziom zaawansowania alg. symb. w chwili obecnej przekracza możliwości większości zainteresowanych osób na świecie

# Co to jest Algebra symboliczna?

- Software pozwalający zastąpić człowieka w trakcie możliwych do algorytmizacji i tabelaryzowania operacji matematycznych
- Dotyczy to np. obliczania całki nieoznaczonej, rozwiązania równania różniczkowego lub algebraicznego, obliczenia wyznacznika macierzy itp.
- Operacje te są wykonywane *symbolicznie(!)* tj. tak jak robi to student na ćwiczeniach z algebry/analizy
- Zwykle metody symboliczne są łączone z tradycyjnymi metodami numerycznymi
- Poziom zaawansowania alg. symb. w chwili obecnej przekracza możliwości większości zainteresowanych osób na świecie

# Co to jest Algebra symboliczna?

- Software pozwalający zastąpić człowieka w trakcie możliwych do algorytmizacji i tabelaryzowania operacji matematycznych
- Dotyczy to np. obliczania całki nieoznaczonej, rozwiązania równania różniczkowego lub algebraicznego, obliczenia wyznacznika macierzy itp.
- Operacje te są wykonywane *symbolicznie(!)* tj. tak jak robi to student na ćwiczeniach z algebry/analizy
- Zwykle metody symboliczne są łączone z tradycyjnymi metodami numerycznymi
- Poziom zaawansowania alg. symb. w chwili obecnej przekracza możliwości większości zainteresowanych osób na świecie

# Co to jest Algebra symboliczna?

- Software pozwalający zastąpić człowieka w trakcie możliwych do algorytmizacji i tabelaryzowania operacji matematycznych
- Dotyczy to np. obliczania całki nieoznaczonej, rozwiązania równania różniczkowego lub algebraicznego, obliczenia wyznacznika macierzy itp.
- Operacje te są wykonywane *symbolicznie(!)* tj. tak jak robi to student na ćwiczeniach z algebry/analizy
- Zwykle metody symboliczne są łączone z tradycyjnymi metodami numerycznymi
- Poziom zaawansowania alg. symb. w chwili obecnej przekracza możliwości większości zainteresowanych osób na świecie

# Co to jest Algebra symboliczna?

- Software pozwalający zastąpić człowieka w trakcie możliwych do algorytmizacji i tabelaryzowania operacji matematycznych
- Dotyczy to np. obliczania całki nieoznaczonej, rozwiązania równania różniczkowego lub algebraicznego, obliczenia wyznacznika macierzy itp.
- Operacje te są wykonywane *symbolicznie(!)* tj. tak jak robi to student na ćwiczeniach z algebry/analizy
- Zwykle metody symboliczne są łączone z tradycyjnymi metodami numerycznymi
- Poziom zaawansowania alg. symb. w chwili obecnej przekracza możliwości większości zainteresowanych osób na świecie

# Co to jest Algebra symboliczna?

- Software pozwalający zastąpić człowieka w trakcie możliwych do algorytmizacji i tabelaryzowania operacji matematycznych
- Dotyczy to np. obliczania całki nieoznaczonej, rozwiązania równania różniczkowego lub algebraicznego, obliczenia wyznacznika macierzy itp.
- Operacje te są wykonywane *symbolicznie*(!) tj. tak jak robi to student na ćwiczeniach z algebry/analizy
- Zwykle metody symboliczne są łączone z tradycyjnymi metodami numerycznymi
- Poziom zaawansowania alg. symb. w chwili obecnej przekracza możliwości większości zainteresowanych osób na świecie

Dlaczego więc nadal uczymy się tradycyjnej matematyki!?



# Co to jest *Algebra symboliczna*?

- Software pozwalający zastąpić człowieka w trakcie możliwych do algorytmizacji i tabelaryzowania operacji matematycznych
- Dotyczy to np. obliczania całki nieoznaczonej, rozwiązywania równania różniczkowego lub algebraicznego, obliczenia wyznacznika macierzy itp.
- Operacje te są wykonywane *symbolicznie(!)* tj. tak jak robi to student na ćwiczeniach z algebry/analizy
- Zwykle metody symboliczne są łączone z tradycyjnymi metodami numerycznymi
- Poziom zaawansowania alg. symb. w chwili obecnej przekracza możliwości większości zainteresowanych osób na świecie

*Do tego pytania będziemy często wracać....*

# Computer Algebra Systems CAS

- Istnieją od lat 70-tych, niekiedy (naiwnie) uważane były za krok w kierunku „sztucznej inteligencji”
- Zwykle opierają się na jądrze wykonującym „prymitywne” operacje matematyczne np. mnożenie/dzielenie wielomianów, działania na ułamkach, rozkład na czynniki pierwsze itp.
- „Zaawansowane” obliczenia (całkowanie, r.różniczkowe, analiza wektorowa itp.) są napisane typowo z użyciem wbudowanego języka programowania 4GL/5GL i podstawowych procedur jądra oraz stabilizowanych wyników (np. typowych całek)
- CAS jest nastawiony na **rozwiązywanie problemów(!)**: zawiera pakiety graficzne, numeryczne, obróbki danych, DTP itp

# Computer Algebra Systems CAS

- Istnieją od lat 70-tych, niekiedy (naiwnie) uważane były za krok w kierunku „sztucznej inteligencji”
- Zwykle opierają się na jądrze wykonującym „prymitywne” operacje matematyczne np. mnożenie/dzielenie wielomianów, działania na ułamkach, rozkład na czynniki pierwsze itp.
- „Zaawansowane” obliczenia (całkowanie, r.różniczkowe, analiza wektorowa itp.) są napisane typowo z użyciem wbudowanego języka programowania 4GL/5GL i podstawowych procedur jądra oraz stabilizowanych wyników (np. typowych całek)
- CAS jest nastawiony na **rozwiązywanie problemów(!)**: zawiera pakiety graficzne, numeryczne, obróbki danych, DTP itp

# Computer Algebra Systems CAS

- Istnieją od lat 70-tych, niekiedy (naiwnie) uważane były za krok w kierunku „sztucznej inteligencji”
- Zwykle opierają się na jądrze wykonującym „prymitywne” operacje matematyczne np. mnożenie/dzielenie wielomianów, działania na ułamkach, rozkład na czynniki pierwsze itp.
- „Zaawansowane” obliczenia (całkowanie, r.różniczkowe, analiza wektorowa itp.) są napisane typowo z użyciem wbudowanego języka programowania 4GL/5GL i podstawowych procedur jądra oraz stabilizowanych wyników (np. typowych całek)
- CAS jest nastawiony na **rozwiązywanie problemów(!)**: zawiera pakiety graficzne, numeryczne, obróbki danych, DTP itp

# Computer Algebra Systems CAS

- Istnieją od lat 70-tych, niekiedy (naiwnie) uważane były za krok w kierunku „sztucznej inteligencji”
- Zwykle opierają się na jądrze wykonującym „prymitywne” operacje matematyczne np. mnożenie/dzielenie wielomianów, działania na ułamkach, rozkład na czynniki pierwsze itp.
- „Zaawansowane” obliczenia (całkowanie, r.różniczkowe, analiza wektorowa itp.) są napisane typowo z użyciem wbudowanego języka programowania 4GL/5GL i podstawowych procedur jądra oraz stabilizowanych wyników (np. typowych całek)
- CAS jest nastawiony na **rozwiązywanie problemów(!)**: zawiera pakiety graficzne, numeryczne, obróbki danych, DTP itp

# Lista CAS (niekompletna)

- MAXIMA (Macysma) <http://maxima.sourceforge.net/>
- DERIVE
- MuPAD <http://www.mupad.com/>
- Maple <http://www.maplesoft.com/>
- MATHEMATICA <http://www.wolfram.com/>

Oprócz MAXIMA wszystkie liczące się systemy CAS są *komercyjne*

UJ dysponuje licencjami 10xMaple oraz 10xMATHEMATICA.

Wykład i ćwiczenia oparte są o system MATHEMATICA

Na pracowniach zainstalowana jest M. 5.2 w wersji Windows (wyłącznie!). Dla odważnych M. 6.0 jest dostępna u mnie.

- [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com)
- [mathworld.wolfram.com](http://mathworld.wolfram.com)
- Pomoc (Documentation Center) w MATHEMATICA
- Small Donald B., Hosack John M.  
*Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniem systemów obliczeń symbolicznych* Wyd.:Wydawnictwa Naukowo-Techniczne ISBN: 83-204-1778-3 Liczba stron: 244
- <http://ribes.if.uj.edu.pl/alsymb/>
- Wikipedia, internet, grupy dyskusyjne, wyszukiwarki
- Strona WFAiS (USOS), kod kursu WFAIS.IF-K110.E

# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego



# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego



# Zakres materiału z punktu widzenia CAS

- 1 Biegłe posługiwanie się graficznym interfejsem użytkownika MATHEMATICA/Maple
- 2 Ładowanie pakietów oraz używanie zawartych w nich funkcji
- 3 Pisanie prostych funkcji i procedur. Pętle i sekwencje wyrażeń
- 4 Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń
- 5 Obliczenia arytmetyczne stało- i zmiennoprzecinkowe dowolnej precyzji
- 6 Obliczenie dowolnej całki oznaczonej i nieoznaczonej, symbolicznie i/lub numerycznie
- 7 Rozwiązanie równania / układu równań, symbolicznie i/lub numerycznie
- 8 Narysowanie przebiegu dowolnej funkcji (w tym zespolonej) 2D / 3D danej w postaci jawnej, parametrycznej lub uwikłanej; proste animacje
- 9 Operacje na wyrażeniach jawnie zespolonych, obliczenie residuum, całki zaspalone po prostoliniowych odcinkach
- 10 Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych



# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zakres materiału z punktu widzenia matematycznego

- 1 arytmetyka dowolnej precyzji
- 2 operowanie wyrażeniami algebraicznymi
- 3 obliczenia na liczbach i wyrażeniach zespolonych
- 4 funkcje elementarne i specjalne
- 5 rozwiązywanie równań liniowych i nieliniowych oraz układów równań
- 6 obliczenia macierzowe
- 7 rachunek różniczkowy i całkowy
- 8 równania różniczkowe zwyczajne
- 9 obliczenia symboliczne i numeryczne
- 10 typowe błędy obliczeń numerycznych i symbolicznych

# Zagadnienia przydatne w toku studiów

- 1 grafika komputerowa
- 2 wykresy 2D i 3D
- 3 animacje
- 4 programowanie obliczeń
- 5 analiza danych pomiarowych
- 6 dopasowywanie krzywych

# Zagadnienia przydatne w toku studiów

- 1 grafika komputerowa
- 2 wykresy 2D i 3D
- 3 animacje
- 4 programowanie obliczeń
- 5 analiza danych pomiarowych
- 6 dopasowywanie krzywych

# Zagadnienia przydatne w toku studiów

- 1 grafika komputerowa
- 2 wykresy 2D i 3D
- 3 animacje
- 4 programowanie obliczeń
- 5 analiza danych pomiarowych
- 6 dopasowywanie krzywych

# Zagadnienia przydatne w toku studiów

- 1 grafika komputerowa
- 2 wykresy 2D i 3D
- 3 animacje
- 4 programowanie obliczeń
- 5 analiza danych pomiarowych
- 6 dopasowywanie krzywych

# Zagadnienia przydatne w toku studiów

- 1 grafika komputerowa
- 2 wykresy 2D i 3D
- 3 animacje
- 4 programowanie obliczeń
- 5 analiza danych pomiarowych
- 6 dopasowywanie krzywych



# Zagadnienia przydatne w toku studiów

- 1 grafika komputerowa
- 2 wykresy 2D i 3D
- 3 animacje
- 4 programowanie obliczeń
- 5 analiza danych pomiarowych
- 6 dopasowywanie krzywych

# CAS podstawowe trudności dla studenta

- Terminologia angielska / wiedza po polsku
- – „całka nieoznaczona” po angielsku?
- – a „dywergencja rotacji”?
- Nie każdy opanował matematykę perfekt

## Wątpliwości...

Czy umiejętność obliczenia całki „ręcznie”  
jest do czegokolwiek potrzebna??

Kto dziś umie wyciągać pierwiastek pisemnie?  
Czy brak tej umiejętności utrudnia pracę?

# UWAGA: Notacja jest ściśle sformalizowana!

Notacja „tradycyjna”

$$\sin^2 x$$

$$\sin^{-1} x$$

$$\frac{1}{\sin x}$$

$$2x + 3$$

$$\operatorname{tg} 2x + 1 / \operatorname{tg} 3x - 1$$

Notacja **CAS**

$$\operatorname{Sin}[x]^2$$

$$\operatorname{ArcSin}[x]$$

$$1/\operatorname{Sin}[x]$$

$$2 x + 3$$

$$\operatorname{Tan}[2 x + 1] / \operatorname{Tan}[3 x - 1]$$



# Notacja cd.

Notacja „tradycyjna”

$\pi$

$i, j$

$e$

Notacja **CAS**

*Pi*

*I*

*E*

**UWAGA:** *Proszę czytać komunikaty o błędach!*

Często automatycznie używamy tego do czego nas przyzwyczajono na ćwiczeniach rachunkowych ( $\sin^2 x$  !!!). Może to powodować bardzo dziwne zachowanie się **CAS**.

- Interaktywna
- Podejście programisty
- Dokumentowanie obliczeń
- Użycie hybrydowych metod symboliczno-numerycznych

PRZYKŁAD: *Potrzebujemy natychmiast obliczyć całkę oznaczoną.*

Metody „tradycyjne”:

- próbujemy obliczyć całkę nieoznaczoną
- szukamy w tablicach
- przybliżamy wyrażenie podcałkowe
- piszemy program

CAS:

- wydajemy polecenie obliczenia całki
- ewentualnie dodatkowo polecamy obliczyć wartość numeryczną

# Konsekwencje upowszechnienia CAS

- „Każdy może całkować”
- Zmiany w sposobie nauczania konieczne
- Klasa problemów łatwych do rozwiązania powiększa się
- Znika „bariera matematyczna”
- Dyskusja nad sensem tradycyjnych przedmiotów nauczania i metod egzaminowania
- Uzależnienie szkół i uniwersytetów od producentów CAS
- Wątpliwości osób zmuszanych do obliczeń ręcznych

# Konsekwencje upowszechnienia CAS

- „Każdy może całkować”
- Zmiany w sposobie nauczania konieczne
  - Klasa problemów łatwych do rozwiązania powiększa się
  - Znika „bariera matematyczna”
  - Dyskusja nad sensem tradycyjnych przedmiotów nauczania i metod egzaminowania
  - Uzależnienie szkół i uniwersytetów od producentów CAS
  - Wątpliwości osób zmuszanych do obliczeń ręcznych

# Konsekwencje upowszechnienia CAS

- „Każdy może całkować”
- Zmiany w sposobie nauczania konieczne
- Klasa problemów łatwych do rozwiązania powiększa się
- Znika „bariera matematyczna”
- Dyskusja nad sensem tradycyjnych przedmiotów nauczania i metod egzaminowania
- Uzależnienie szkół i uniwersytetów od producentów CAS
- Wątpliwości osób zmuszanych do obliczeń ręcznych



# Konsekwencje upowszechnienia CAS

- „Każdy może całkować”
- Zmiany w sposobie nauczania konieczne
- Klasa problemów łatwych do rozwiązania powiększa się
- Znika „bariera matematyczna”
- Dyskusja nad sensem tradycyjnych przedmiotów nauczania i metod egzaminowania
- Uzależnienie szkół i uniwersytetów od producentów CAS
- Wątpliwości osób zmuszanych do obliczeń ręcznych

# Konsekwencje upowszechnienia CAS

- „Każdy może całkować”
- Zmiany w sposobie nauczania konieczne
- Klasa problemów łatwych do rozwiązania powiększa się
- Znika „bariera matematyczna”
- Dyskusja nad sensem tradycyjnych przedmiotów nauczania i metod egzaminowania
- Uzależnienie szkół i uniwersytetów od producentów CAS
- Wątpliwości osób zmuszanych do obliczeń ręcznych

# Konsekwencje upowszechnienia CAS

- „Każdy może całkować”
- Zmiany w sposobie nauczania konieczne
- Klasa problemów łatwych do rozwiązania powiększa się
- Znika „bariera matematyczna”
- Dyskusja nad sensem tradycyjnych przedmiotów nauczania i metod egzaminowania
- Uzależnienie szkół i uniwersytetów od producentów CAS
- Wątpliwości osób zmuszanych do obliczeń ręcznych

# Konsekwencje upowszechnienia CAS

- „Każdy może całkować”
- Zmiany w sposobie nauczania konieczne
- Klasa problemów łatwych do rozwiązania powiększa się
- Znika „bariera matematyczna”
- Dyskusja nad sensem tradycyjnych przedmiotów nauczania i metod egzaminowania
- Uzależnienie szkół i uniwersytetów od producentów CAS
- Wątpliwości osób zmuszanych do obliczeń ręcznych

# Konsekwencje upowszechnienia CAS

- „Każdy może całkować”
- Zmiany w sposobie nauczania konieczne
- Klasa problemów łatwych do rozwiązania powiększa się
- Znika „bariera matematyczna”
- Dyskusja nad sensem tradycyjnych przedmiotów nauczania i metod egzaminowania
- Uzależnienie szkół i uniwersytetów od producentów CAS
- Wątpliwości osób zmuszanych do obliczeń ręcznych

„Cofnięcie się” z rozwiązań na pozycje „równań wyjściowych”

# „Cofnięcie się” na pozycje „równań wyjściowych”

Problem I: znaleźć pozycję „ciała” rzuconego pionowo w górę z prędkością  $v_0 = 1 \text{ m/s}$  po 1 sekundzie

## Nauczanie tradycyjne:

- Wyciągamy z pamięci wzór:  $s = -gt^2/2 + v_0t$
- Wstawiamy do wzoru

## CAS:

- Znamy *wyłącznie* II zasadę dynamiki Newtona  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
- Wypisujemy  $r$ , różniczkowe:

$$-mg = ms''$$

- Rozwiązujemy ww. równanie z położeniem początkowym  $s(0) = 0$  oraz prędkością początkową  $v(0) = v_0$
- **Otrzymujemy** wzór  $s = -gt^2/2 + v_0t$
- Wstawiamy do wzoru

Dla osoby która nie zna metod (algorytmów) rozwiązywania r. różniczkowych zwyczajnych jest to problem.

W tym momencie wkracza na scenę CAS:

```
DSolve[{s[0] == 0, s'[0] == v0, -mg == ms''[t]}, s[t], t]
```

$$\{\{s[t] - > \frac{1}{2}(-gt^2 + 2tv_0)\}\}$$

Czy jest to dłuższa droga?

Tak, ale spróbujmy uwzględnić np. opory powietrza.

Nie znamy wzoru? A może wcale nie istnieje taki wzór?

Dysponując CAS odpowiedź znajdujemy natychmiast

Zakładając, że opór powietrza jest proporcjonalny do prędkości:

$$mg - \alpha v = ma$$

Rozwiązujemy równanie:

$$DSolve[\{s[0] == 0, s'[0] == v0, -mg - \alpha s'[t] == ms''[t]\}, s[t], t]$$

$$\{\{s[t] \rightarrow \frac{-e^{-\frac{t\alpha}{m}} m(gm - e^{-\frac{t\alpha}{m}} gm + e^{-\frac{t\alpha}{m}} gt\alpha + v0\alpha - e^{-\frac{t\alpha}{m}} v0\alpha)}{\alpha^2}\}\}$$

Wzór istnieje, ale jest zbyt skomplikowany do zapamiętania

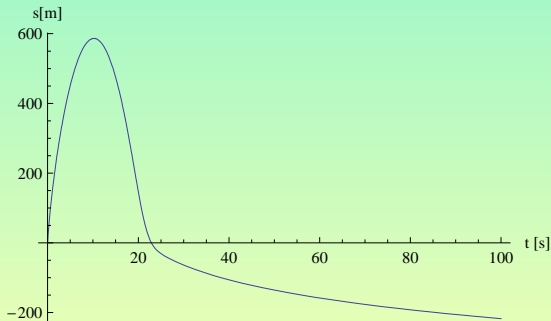


## Granice możliwości obliczeń symbolicznych

Zagadnienie możemy dowolnie komplikować, ale w pewnym momencie spotkamy sytuację gdzie wzór analityczny *nie istnieje!*

Np. niech współczynnik oporu powietrza  $\alpha$  będzie funkcją wysokości nad ziemią  $\alpha = \alpha_0 \exp -s/s_0$

Teraz nie znajdziemy wzoru na  $s(t)$ , ale możemy łatwo rozwiązać problem *numerycznie*. Szczegóły na ćwiczeniach [Wykres niżej].



Wykonajmy działanie:

$$\frac{1024}{16} + 128 \cdot 8 - 2^{16}$$

Po uruchomieniu dysponujemy otwartym oknem z tzw. „prompt”:

```
In[1]:=1024/16 + 128 8 - 2^16
```

```
Out [1]=-64448
```

Uwaga:

- Znak mnożenia niepotrzebny!
- naciśnięcie **Shift+Enter** powoduje obliczenie wyrażenia
- naciśnięcie **Enter** powoduje przejście do następnej linii

*Dokładnie na odwrót w MAPLE !*

# Fundamentalne informacje

- Wszystkie wbudowane funkcje zaczynają się od wielkiej litery np. **Sin[x]**, **Cos[x]**, **Exp[x]**, **Limit[Exp[-x],x→Infinity]**
- Znak równości (w równaniach) to **==** !!!
- Pojedyncze **=** oznacza przypisanie wartości do zmiennej np:  
**wielomianek = (x^3 + 5 x + a x + b)^3**
- Prawie wszystkie funkcje występują w postaci pełnych nazw np: **FindRoot[Exp[x]==Log[Sin[x]+2],{x,0}]**  
**Integrate[x^Sin[x] (Cos[x]Log[x] +  $\frac{Sin[x]}{x}$ ) ,x]**
- Operatory **%**, **%%**, **%%%** odwołują się do, odpowiednio: poprzedniego, przedostatniego i 3 wstecz wyniku

# Fundamentalne konstrukcje: definicja zakresu

## Zakres zmiennej

Zakres zmienności pewnej wielkości podajemy w nawiasach wąsatych (klamrowych):

**{x, min, max, [step] }**

## Przykłady

- Liczby całkowite z zakresu (0,10):

**Table[i, {i, 0, 10}]**

- Całka od zera do  $\pi$ :

**Integrate[Sin[x], {x, 0, Pi}]**

- Wykres funkcji w przedziale (-5,5):

**Plot[Sinh[x], {x, -5, 5}]**

- Obliczenie wartości sinusa od 0 do  $2\pi$  co  $\pi/6$ :

**Table[Sin[ $\alpha$ ], { $\alpha$ , 0, 2 Pi, Pi/6 }]**

# Fundamentalne konstrukcje: sekwencje

## Funkcja **Table**

Aby wygenerować sekwencję wyrażeń używamy:

**Table**[wyrażenie, {enum, min, max, [krok] }

## Przykłady

- Tablica całek:

**Table**[Integrate[ $\frac{x^n}{1+\text{Sin}[x]}$ , {x,0,Pi}], {n,1,4}]

- Lista (numerycznych) rozwiązań równania z parametrem  $\lambda$ :

**Table**[ FindRoot[ Exp[Sin[x]]== $\lambda/x$ , {x,1}], { $\lambda$ ,1,2,0.01}]

## Uwaga

W wersji 5.2 **Table** może być użyte do generowania klitek animacji. W wersji 6.0 służy do tego **Animate**. Funkcje mają tę samą składnię i mogą być wymieniane, wyświetlając wyniki w żądanej postaci (lista lub animacja).

# Fundamentalne konstrukcje: operator „zamień wszystko” i „reguły transformacyjne”

## Reguła transformacyjna

- $x$  zamieniamy na  $y$ :  $x \rightarrow y$
- W wyżej podanej postaci wynik zwracają tak ważne funkcje jak **FindRoot** czy **DSolve**
- R. transf. można przypisywać do zmiennej np:  
**reguła =  $x \rightarrow y$**

## Operator „zamień wszystko” /.

- Operator ten w postaci rozwiniętej to:  
**ReplaceAll[wyrażenie, reguła]**
- Oznacza on: zamień w „wyrażeniu” zgodnie z „regułami”
- Równoważny (używany w praktyce) skrót to  
**wyrażenie /. reguła**

## UWAGA!!!

Operator ten (`/.`) jest niezwykle użyteczny i ciągle używany, warto go dobrze zapamiętać lub/i zapisać!

## Przykłady

- Reguła: **reg**  $\equiv x \rightarrow \pi$   
Wyrażenie: **wyr** =  $(1+x)^n$   
Zastosowanie: **wyr** `/.` **reg**  
Wynik:  $(1 + \pi)^n$
- „Wyciągnięcie” wyniku wygenerowanego przez **FindRoot**:  
In[1] := **FindRoot**[ $x^x == \text{Pi}$ , x, 1]  
Out[1] := {x  $\rightarrow$  1.85411}  
In[2] := **x** `/.` %  
Out[2] := 1.85411

# Najczęstsze błędy studentów (część I)

- 1 Niewłaściwe nazwy dla wbudowanych funkcji np. **Tg**[Pi/4] zamiast **Tan**[Pi/4]
- 2 Literka „i” zamiast jednostki urojonej **I** (itp)
- 3 Pojedyncze = w równaniach, powinno być ==
- 4 Poza oczywistymi i specjalnymi przypadkami, lepiej (o ile to możliwe) najpierw rozwiązać problem numerycznie, a potem spróbować analitycznie!
- 5 Aby rozpocząć obliczenia numeryczne, *wszystkie* parametry symboliczne muszą mieć nadane wartości liczbowe!
- 6 Wszystkie zmienne są domyślnie *zespolone*. Nie jest możliwe obliczenie **Re**[a+ I b] ponieważ nie znamy *liczb zespolonych* a i b ! Do tego służy m. in. **ComplexExpand**.
- 7 Do numerycznego rozwiązywania równań i układów równań służy **FindRoot** a nie **NSolve** ! **NSolve** rozwiązuje *systemy wielomianowe*.



# Najczęstsze błędy studentów (część I)

- 1 Niewłaściwe nazwy dla wbudowanych funkcji np. **Tg**[Pi/4] zamiast **Tan**[Pi/4]
- 2 Literka „i” zamiast jednostki urojonej **I** (itp)
- 3 Pojedyncze = w równaniach, powinno być ==
- 4 Poza oczywistymi i specjalnymi przypadkami, lepiej (o ile to możliwe) najpierw rozwiązać problem numerycznie, a potem spróbować analitycznie!
- 5 Aby rozpocząć obliczenia numeryczne, *wszystkie* parametry symboliczne muszą mieć nadane wartości liczbowe!
- 6 Wszystkie zmienne są domyślnie *zespolone*. Nie jest możliwe obliczenie **Re**[a+ I b] ponieważ nie znamy *liczb zespolonych* a i b ! Do tego służy m. in. **ComplexExpand**.
- 7 Do numerycznego rozwiązywania równań i układów równań służy **FindRoot** a nie **NSolve** ! **NSolve** rozwiązuje *systemy wielomianowe*.

# Najczęstsze błędy studentów (część I)

- 1 Niewłaściwe nazwy dla wbudowanych funkcji np. **Tg**[Pi/4] zamiast **Tan**[Pi/4]
- 2 Literka „i” zamiast jednostki urojonej **I** (itp)
- 3 Pojedyncze = w równaniach, powinno być ==
- 4 Poza oczywistymi i specjalnymi przypadkami, lepiej (o ile to możliwe) najpierw rozwiązać problem numerycznie, a potem spróbować analitycznie!
- 5 Aby rozpocząć obliczenia numeryczne, *wszystkie* parametry symboliczne muszą mieć nadane wartości liczbowe!
- 6 Wszystkie zmienne są domyślnie *zespolone*. Nie jest możliwe obliczenie **Re**[a+ I b] ponieważ nie znamy *liczb zespolonych* a i b ! Do tego służy m. in. **ComplexExpand**.
- 7 Do numerycznego rozwiązywania równań i układów równań służy **FindRoot** a nie **NSolve** ! **NSolve** rozwiązuje *systemy wielomianowe*.

# Najczęstsze błędy studentów (część I)

- 1 Niewłaściwe nazwy dla wbudowanych funkcji np. **Tg**[Pi/4] zamiast **Tan**[Pi/4]
- 2 Literka „i” zamiast jednostki urojonej **I** (itp)
- 3 Pojedyncze = w równaniach, powinno być ==
- 4 Poza oczywistymi i specjalnymi przypadkami, lepiej (o ile to możliwe) najpierw rozwiązać problem numerycznie, a potem spróbować analitycznie!
- 5 Aby rozpocząć obliczenia numeryczne, *wszystkie* parametry symboliczne muszą mieć nadane wartości liczbowe!
- 6 Wszystkie zmienne są domyślnie *zespolone*. Nie jest możliwe obliczenie **Re**[**a**+ **I** **b**] ponieważ nie znamy *liczb zespolonych* **a** i **b** ! Do tego służy m. in. **ComplexExpand**.
- 7 Do numerycznego rozwiązywania równań i układów równań służy **FindRoot** a nie **NSolve** ! **NSolve** rozwiązuje *systemy wielomianowe*.

# Najczęstsze błędy studentów (część I)

- 1 Niewłaściwe nazwy dla wbudowanych funkcji np. **Tg**[Pi/4] zamiast **Tan**[Pi/4]
- 2 Literka „i” zamiast jednostki urojonej **I** (itp)
- 3 Pojedyncze = w równaniach, powinno być ==
- 4 Poza oczywistymi i specjalnymi przypadkami, lepiej (o ile to możliwe) najpierw rozwiązać problem numerycznie, a potem spróbować analitycznie!
- 5 Aby rozpocząć obliczenia numeryczne, *wszystkie* parametry symboliczne muszą mieć nadane wartości liczbowe!
- 6 Wszystkie zmienne są domyślnie *zespolone*. Nie jest możliwe obliczenie **Re**[a+ I b] ponieważ nie znamy *liczb zespolonych* a i b ! Do tego służy m. in. **ComplexExpand**.
- 7 Do numerycznego rozwiązywania równań i układów równań służy **FindRoot** a nie **NSolve** ! **NSolve** rozwiązuje *systemy wielomianowe*.

# Najczęstsze błędy studentów (część I)

- 1 Niewłaściwe nazwy dla wbudowanych funkcji np. **Tg**[Pi/4] zamiast **Tan**[Pi/4]
- 2 Literka „i” zamiast jednostki urojonej **I** (itp)
- 3 Pojedyncze = w równaniach, powinno być ==
- 4 Poza oczywistymi i specjalnymi przypadkami, lepiej (o ile to możliwe) najpierw rozwiązać problem numerycznie, a potem spróbować analitycznie!
- 5 Aby rozpocząć obliczenia numeryczne, *wszystkie* parametry symboliczne muszą mieć nadane wartości liczbowe!
- 6 Wszystkie zmienne są domyślnie *zespolone*. Nie jest możliwe obliczenie **Re**[**a**+ **I** **b**] ponieważ nie znamy *liczb zespolonych* **a** i **b** ! Do tego służy m. in. **ComplexExpand**.
- 7 Do numerycznego rozwiązywania równań i układów równań służy **FindRoot** a nie **NSolve** ! **NSolve** rozwiązuje *systemy wielomianowe*.

# Najczęstsze błędy studentów (część I)

- 1 Niewłaściwe nazwy dla wbudowanych funkcji np. **Tg**[Pi/4] zamiast **Tan**[Pi/4]
- 2 Literka „i” zamiast jednostki urojonej **I** (itp)
- 3 Pojedyncze = w równaniach, powinno być ==
- 4 Poza oczywistymi i specjalnymi przypadkami, lepiej (o ile to możliwe) najpierw rozwiązać problem numerycznie, a potem spróbować analitycznie!
- 5 Aby rozpocząć obliczenia numeryczne, *wszystkie* parametry symboliczne muszą mieć nadane wartości liczbowe!
- 6 Wszystkie zmienne są domyślnie *zespolone*. Nie jest możliwe obliczenie **Re**[**a**+ **I** **b**] ponieważ nie znamy *liczb zespolonych* **a** i **b** ! Do tego służy m. in. **ComplexExpand**.
- 7 Do numerycznego rozwiązywania równań i układów równań służy **FindRoot** a nie **NSolve** ! **NSolve** rozwiązuje *systemy wielomianowe*.