

Zadanie 1.

2-wymiarowe równanie Burgersa, modelujące przepływ płynu z prędkością \mathbf{u} i lepkością ϵ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \epsilon \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_x(x, y, t), u_y(x, y, t))$ – pole wektora prędkości za pomocą transformacji Cole-Hopf'a:

$$\mathbf{u} = -2\epsilon \nabla \ln \chi(x, y, t)$$

sprowadza się do liniowego równania rozchodzenia się ciepła. Celem zadania jest przedstawienie zbioru nietrywialnych (nie dających się sprowadzić do 1 wymiaru) rozwiązań równania (1) dla $\epsilon \rightarrow 0$ i wybranych nieciągłych warunków początkowych. W szczególności należy zbadać jak zachowują się rozwiązania dla których w chwili $t = 0$ pole prędkości rotuje np:

$$\mathbf{u} \Big|_{t=0} = \begin{cases} (-\Omega y, \Omega x,) & \text{dla } x^2 + y^2 > R^2 \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 < R^2 \end{cases}$$

oraz posiadających w chwili $t = 0$ symetrię „wielokątną”:

$$\mathbf{u} \left(r, \phi, t = 0 \right) = \mathbf{u} \left(r, \phi + \frac{2\pi}{n} \right)$$

we współrzędnych biegunowych, gdzie $n = 3, 4, 5, 6, \dots$

Zadanie 2.

Celem zadania jest napisanie programu dokonującego wizualizacji linii sił zadanego pola wektorowego w trzech wymiarach oraz zademonstrowanie działania na wybranych przykładach np. pola magnetycznego pochodzącego od wielokątnej ramki z prądem elektrycznym itp. Program powinien działać adaptacyjnie, bez dużej ingerencji użytkownika dobierając automatycznie gęstość linii sił pola, ewentualne kolory itp.

UWAGA! *Wizualizacja za pomocą „strzałek” jest wykluczona!*

Zadanie 3.

Równanie:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F[u(x, t)]}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

gdzie funkcja F jest zadana z góry, posiada rozwiązanie szczególne postaci

$$u(x, t) = h \left(\frac{Ax + B}{Ct + D} \right) \quad (3)$$

gdzie h jest funkcją odwrotną do pochodnej funkcji F :

$$h(F'(x)) = x$$

Celem jest znalezienie przybliżonego rozwiązania zagadnienia początkowego równania (2) w postaci posklejanych funkcji (3).