Zadanie 1.

Oblicz wyznacznik Det$\mathcal{A}_n$ macierzy o wymiarach $n \times n$ i elementach:

$$\mathcal{A}_{ij} = i^j.$$

Wskazówka: Znajdź zależność pomiędzy Det$\mathcal{A}_n$ *a* Det$\mathcal{A}_{n-1}$ *lub oblicz 5 pierwszych wartości i użyj GOOGLE.*

Zadanie 2.

a) Rozwiąż równanie:

$$\mathcal{X}^2 = \mathcal{A}$$

gdzie:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b*) Rozwiąż równanie:

$$\mathcal{X}^2 = \mathcal{I}$$

gdzie macierz jednostkowa 2×2:

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadanie 3.

Oblicz n-tą potęgę macierzy trójkątnej $n \times n$ postaci:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a & \dots & a \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zawierającej same zera na przekątnej oraz wartość a w górnym trójkącie. Ile wynosi $n+1$-sza potęga tej macierzy?

Zadanie 4.

a) Oblicz wyrażenie:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^n$$

b*) Znajdź wszystkie macierze 2×2 zachowujące się przy potęgowaniu podobnie jak macierz z punktu a.

Zadanie 5.

Wylicz λ z równania:

$$\mathcal{A} + e^{\mathcal{A}} + \mathcal{J} = \lambda\, \mathcal{A}$$

gdzie:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1-\pi & 1-\pi \\ \pi & \pi \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} = e^{\begin{pmatrix} 0 & i\pi \\ i\pi & 0 \end{pmatrix}}$$