

Zadanie 1.

Proszę dokończyć Zad 2. z zestawu nr. 6. W równaniach był zły znak przy pochodnej względem x .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

Wskazówki: Zadanie można rozwiązać na kilka sposobów np. numerycznie lub metodą rozdzielania zmiennych. Dla rozwiązań numerycznych należy ograniczyć się do jednego okresu.

Zadanie 2.

Niech rzeczywista kwadratowa macierz \mathcal{O} o wymiarze 3×3 dana jest wyrażeniem:

$$\mathcal{O} = e^{\alpha \mathcal{A}}$$

gdzie $\alpha > 0$ i składowe macierzy \mathcal{A} są równe ($i, j = 1, 2, 3$):

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} n^k,$$

wektor \mathbf{n} ma składowe n^k równe:

$$n^1 = \cos \phi \sin \vartheta$$

$$n^2 = \sin \phi \sin \vartheta$$

$$n^3 = \cos \vartheta,$$

natomiast ϵ_{ijk} to 3-wymiarowy symbol Levi-Civity o składowych ($i, j, k = 1, 2, 3$):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = j, i = k \text{ lub } j = k \\ +1 & \text{dla } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ lub } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{dla } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1) \text{ lub } (2, 1, 3) \end{cases}$$

Należy podać składowe macierzy \mathcal{O} w następujących przypadkach:

1. $\alpha = 0$

2. $\vartheta = 0$

3. $\vartheta = \pi/2, \phi = 0$

4. $\vartheta = \pi/2, \phi = \pi/2$

a ponadto obliczyć w przypadku ogólnym (dla dowolnych rzeczywistych wartości α, ϑ i ϕ) wyznacznik, ślad, wielomian charakterystyczny oraz wartości własne.

Zadanie 3.

Oblicz całkę:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2(x^2 - a^2)}{1 + e^{bx-c}} dx$$

gdzie $a, b > 0$.