

Zadanie 1.

Niech rzeczywista kwadratowa macierz \mathcal{O} o wymiarze 3×3 dana jest wyrażeniem:

$$\mathcal{O} = e^{\alpha \mathcal{A}}$$

gdzie $\alpha > 0$ i składowe macierzy $\mathcal{A} = \epsilon \cdot \mathbf{n}$ są równe ($i, j = 1, 2, 3$):

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} n^k,$$

wektor \mathbf{n} ma składowe n^k równe:

$$\begin{aligned} n^1 &= \cos \phi \sin \vartheta \\ n^2 &= \sin \phi \sin \vartheta \\ n^3 &= \cos \vartheta, \end{aligned}$$

natomiast ϵ_{ijk} to 3-wymiarowy symbol Levi-Civity o składowych ($i, j, k = 1, 2, 3$):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = j, i = k \text{ lub } j = k \\ +1 & \text{dla } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ lub } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{dla } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1) \text{ lub } (2, 1, 3) \end{cases}$$

Należy podać składowe macierzy \mathcal{O} w następujących przypadkach:

1. $\alpha = 0$
2. $\vartheta = 0$

$$3. \vartheta = \pi/2, \phi = 0$$

$$4. \vartheta = \pi/2, \phi = \pi/2$$

a ponadto obliczyć w przypadku ogólnym (dla dowolnych rzeczywistych wartości α, ϑ i ϕ) wyznacznik, ślad oraz wartości własne.

Wskazówka: Symbol ϵ_{ijk} w MATHEMATICA to `Signature[{i,j,k}]`.

Zadanie 2.

Znajdź rzeczywiste rozwiązania równania:

$$\frac{2}{x} \int_0^x \sin t^2 dt = 1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2$$

Zadanie 3.

W jakiej maksymalnej odległości może upaść kula o masie $m = 1$ kg wyrzucona z prędkością $v_0 = 100$ m/s pod kątem α do poziomu, jeżeli współczynnik oporu powietrza wynosi $k = 0.1$.

Wskazówka: równanie ruchu ma postać:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \mathbf{g} - k \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

gdzie m -masa, k -wsp. oporu pow., \mathbf{g} - przysp. ziemskie.