Zadanie 1.

2-wymiarowe równanie Burgersa, modelujące przepływ płynu z prędkością $\mathbf{u}$ i lepkością ϵ:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = \epsilon\, \Delta\mathbf{u} \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_x(x,y,t), u_y(x,y,t))$ – pole wektora prędkości, za pomocą transformacji Cole-Hopf'a:

$$\mathbf{u} = -2\epsilon\, \nabla \ln \chi(x,y,t)$$

sprowadza się do liniowego równania rozchodzenia się ciepła. Celem zadania jest przedstawienie zbioru nietrywialnych (nie dających się sprowadzić do 1 wymiaru) rozwiązań równania (1) dla $\epsilon \to 0$ i wybranych nieciągłych warunków początkowych. W szczególności należy zbadać jak zachowują się rozwiąania dla których w chwili $t = 0$ pole prędkości rotuje np:

$$\mathbf{u}\Big|_{t=0} = \begin{cases} (-\Omega\, y, \Omega\, x,) & \text{dla} \quad x^2 + y^2 > R^2 \\ 0 \quad \text{dla} \quad x^2 + y^2 < R^2 \end{cases}$$

oraz posiadających w chwili $t = 0$ symetrię „wielokątną”:

$$\mathbf{u}\Big(r, \phi, t = 0\Big) = \mathbf{u}\Big(r, \phi + \frac{2\pi}{n}\Big)$$

we współrzędnych biegunowych, gdzie $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$.

Zadanie 2.

Równanie:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F[u(x,t)]}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

gdzie funkcja F jest zadana z góry posiada rozwiązanie szczególne postaci:

$$u(x,t) = h\left(\frac{Ax + B}{Ct + D}\right) \tag{3}$$

gdzie h jest funkcją odwrotną do pochodnej funkcji F:

$$h(F'(x)) = x$$

Celem jest znalezienie przybliżonego rozwiązania zagadnienia poczatkowego równania (2) w postaci posklejanych funkcji (3).

Zadanie 3.

Celem zadania jest wygenerowanie:

a) listy zawierającej optymalny (z punktu widzenia jak najmniejszej ilości mnożeń wymaganej w celu uzyskania rezultatu) rozkład potęgi $a^n b^m$ (n, m - liczby naturalne) dodatnich rzeczywistych liczb a, b.

b) jak wyżej, ale dla wyrażenia:

$$\frac{a^n}{b^m}$$

ZADANIE 4.

Oblicz *symbolicznie* całkę

$$I(z) = \int_0^\infty \int_{2a}^\infty K_{2-2z}(x)\, dx\, da,$$

gdzie K jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju (f. Macdonalda), lub całkę:

$$F(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{2}{y} \frac{\sinh\left[(1-z)\cosh^{-1} p\right]}{(1-z)\sinh\left[\cosh^{-1} p\right]}\, dxdy \tag{4a}$$

gdzie $0 < z < 1$, oraz:

$$p = \frac{\left(x+y^2\right)^2 \cosh\sqrt{2x} - \left(x-y^2\right)^2 \cos\sqrt{2x}}{4xy^2} \tag{4b}$$

ZADANIE 5.

Macierz odwrotną można wyrazić poprzez 4 mniejsze macierze odwrotne zgodnie ze wzorem, który jest podany w Wikipedii, w sekcji *Blockwise inversion*: `http://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix`. Rozwiązanie zadania wymaga dostępu do min. czterordzeniowego procesora.

a) Zaimplementować równoległą wersję polecenia **Inverse**, która będzie obliczała każdą z małych macierzy odwrotnych (plus ewentualnie inne wymagane operacje macierzowe) na osobnym kernelu

b) W miarę możliwości technicznych (dostępu do wielu fizycznych procesorów) wykonać testy różnych wariantów równoleglizacji oraz ich wydajność

c) Rozszerzyć metodę do postaci *rekursywnej*. Ustalić optymalny sposób i poziom rekursji.

d) Czy istnieje analogiczny sposób obliczania macierzy odwrotnej poprzez jej podział na 9 części?. Jeżeli tak, proszę podać odpowiednie wzory.

e) Zaproponuj schemat dostosowany do komputera posiadających więcej niż 4 fizyczne CPU, np. 24-procesorowego (shiva, 96 GB), oraz 64/96-procesorowego (deszno).