

Zadanie 1.

2-wymiarowe równanie Burgersa, modelujące przepływ płynu z prędkością \mathbf{u} i lepkością ϵ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \epsilon \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{u} = (u_x(x, y, t), u_y(x, y, t))$ – pole wektora prędkości, za pomocą transformacji Cole-Hopf'a:

$$\mathbf{u} = -2\epsilon \nabla \ln \chi(x, y, t)$$

sprowadza się do liniowego równania rozchodzenia się ciepła. Celem zadania jest przedstawienie zbioru nietrywialnych (nie dających się sprowadzić do 1 wymiaru) rozwiązań równania (1) dla $\epsilon \rightarrow 0$ i wybranych nieciągłych warunków początkowych. W szczególności należy zbadać jak zachowują się rozwiązania dla których w chwili $t = 0$ pole prędkości rotuje np:

$$\mathbf{u} \Big|_{t=0} = \begin{cases} (-\Omega y, \Omega x,) & \text{dla } x^2 + y^2 > R^2 \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 < R^2 \end{cases}$$

oraz posiadających w chwili $t = 0$ symetrię „wielokątną”:

$$\mathbf{u} \left(r, \phi, t = 0 \right) = \mathbf{u} \left(r, \phi + \frac{2\pi}{n} \right)$$

we współrzędnych biegunowych, gdzie $n = 3, 4, 5, 6 \dots$

Zadanie 2.

Równanie:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F[u(x, t)]}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

gdzie funkcja F jest zadana z góry posiada rozwiązanie szczególne postaci:

$$u(x, t) = h \left(\frac{Ax + B}{Ct + D} \right) \quad (3)$$

gdzie h jest funkcją odwrotną do pochodnej funkcji F :

$$h(F'(x)) = x$$

Celem jest znalezienie przybliżonego rozwiązania zagadnienia początkowego równania (2) w postaci posklejanych funkcji (3).

Zadanie 3.

Celem zadania jest wygenerowanie:

a) listy zawierającej optymalny (z punktu widzenia jak najmniejszej ilości mnożeń wymaganej w celu uzyskania rezultatu) rozkład potęgi $a^n b^m$ (n, m - liczby naturalne) dodatnich rzeczywistych liczb a, b .

b) jak wyżej, ale dla wyrażenia:

$$\frac{a^n}{b^m}$$

Zadanie 4.

Oblicz *symbolicznie* całkę

$$I(z) = \int_0^{\infty} \int_{2a}^{\infty} K_{2-2z}(x) dx da,$$

gdzie K jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju (f. Macdonalda).