Zadanie 0.

Rozwiąż równanie różniczkowe czastkowe:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \sin x$$

Znajdź rozwiązanie które na płaszczyźnie yz $(x = 0)$ przyjmuje wartości $f(0,y,z) = y^2 + z^2$.

Zadanie 1.

Narysuj kilka rozwiązań szczególnych równania różniczkowego cząstkowego:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y} = f^2$$

Zadanie 2.

Przedstaw jako animację rozwiązanie równania:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

z warunkiem początkowym $u_0(x) \equiv u(x,0)$:
a) $u(x,0) = e^x$
b) $u(x,0) = e^{-x^2}$
c) $u(x,0) = \sin x$

Wskazówka: rozwiązaniem równania funkcyjnego które produkuje **DSolve** jest $ab + {u_0}^{-1}(a)$.

Zadanie 3.

Rozważmy ciąg funkcyjny zdefiniowany w następujący sposób: a) niech $f_0 = h(t)$, gdzie h jest dowolną funkcją b) f_{n+1} jest rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego:

$$L(y, y', y'') = f_n(t) \qquad (*)$$

gdzie L jest dowolną funkcją trzech zmiennych. Warunek początkowy dla równania (*) to $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Czy tak zdefiniowany ciąg posiada granicę dla jakiejkolwiek kombinacji funkcji L i f_0 w otoczeniu punktu $t = 0$? Rozważ klika-kilkanaście konkretnych przypadków aby wyrobić intuicję na temat tego problemu.
Wskazówka: użyj kombinacji **NDSolve** i **Nest**.

Zadanie 4.

Rozważmy równanie rozchodzenia się ciepła:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \equiv \mathbf{H}u \qquad (**)$$

gdzie operator liniowy $\mathbf{H} = \frac{d^2}{dx^2}$.

a) Oblicz transformatę Fouriera równania (**) względem x, a następnie rozwiąż tak otrzymane r. różniczkowe zwyczajne względem t. Jak wygląda rozwiązanie zagadnienia początkowego równania (**) gdzie w chwili $t = 0$ $u(x,0) = u_0(x)$?

b) Rozwiąż zagadnienie początkowe równania (**) numerycznie; porównaj z pkt. a

c*) Rozwiąż zagadnienie początkowe równania (**) metodą rozdzielania zmiennych; porównaj z pkt. b

d) Rozwiąż równanie (**) traktując **H** jak liczbę, a następnie nadaj sens wyrażeniu:

$$e^{\mathbf{H}t} \equiv e^{t\frac{d^2}{dx^2}}$$

rozwijając eksponentę w szereg potęgowy. Porównaj uzyskane w ten sposób rozwiązanie zagadnienia początkowego z rozwiązaniami uzyskanymi w inny sposób: za pomocą transformaty Fouriera (a) i numerycznie (b).
Wskazówki: metody (a) i (d) formalnie pozwalają na rozwiązanie dla $t > 0$ i $-\infty < x < \infty$, ale jeżeli podchodzimy do nich numerycznie przedział x musi być skończony; w praktyce jest on mały. Metody (c) i (d) działają dla skończonego przedziału $x_1 < x_2$ i wymagają podania *warunków brzegowych* w punktach $x = x_1$ oraz $x = x_2$. Te warunki brzegowe są w ogólności *funkcjami czasu* t i są „równoważne” strumieniowi ciepła przepływajacemu z obszarów $x < x_1$ i $x > x_2$ w podejściach (a) i (d).

Zadanie 5.

Porównaj drgania struny i belki o tej samej długości, zamocowanych z obu stron.

Wskazówka: równanie struny:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

równanie belki:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^4} = 0$$

W zależności od wartości parametrów c, k oraz warunków początkowych rozwiązanie numeryczne może być trudne do znalezienia. Przeszukaj opcje dotyczące **NDSolve**, w szczególności "MethodOfLines" i "SpatialDiscretization". Problem można próbować rozwiązać też metodą rozdzielania zmiennych.