ZADANIE 1.

Dana jest kwadratowa macierz $\mathcal{A}$ o wymiarze $N \times N$ wypełniona rzeczywistymi liczbami losowymi z przedziału $[0, 1]$. Dla macierzy $\mathcal{B}$ określonej wzorem:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{A}^T$$

należy obliczyć:

1. logarytm wyznacznika: $\log |Det(\mathcal{A})|$
2. ślad
3. dwie największe, dwie najmniejsze oraz dwie najbliższe zera wartości własne
4. ilość wartości własnych w przedziale (λ_1, λ_2)

Wartości N, λ_1, λ_2 i ewentualne wskazówki zostaną wypisane na tablicy.

ZADANIE 2.

Dane jest równanie różniczkowe:

$$y'' + 2\left(y' + y + \sin^n x\right) = 0$$

z warunkami początkowymi:

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = a$$

Dla podanych na tablicy wartości n i a:

1. Znajdź najbliższe zera dodatnie x_2 i ujemne x_1 miejsce zerowe funkcji $y(x)$ będącej rozwiązaniem zadanego równania
2. Określ dla której z podanych wartości a pole pod nieujemną częścią krzywej $y(x)$ w przedziale (x_1, x_2) jest minimalne
3. Podaj ile wynosi to minimalne pole powierzchni

ZADANIE 3.

Dana jest całka:

$$I(k, m, n) = \int_0^{k\pi} \frac{\sin^n \phi}{\phi^m}\, e^{i\phi}\, d\phi$$

Dla podanych na tablicy wartości k, m, n obliczyć podaną całkę i podać:

1. Ile wynosi całka
2. Część rzeczywistą i urojoną całki
3. Moduł całki

ZADANIE 4.

W jakiej maksymalnej odległości może upaść kula o masie $m = 1$ kg wyrzucona z prędkością $v_0 = 100$m/s pod kątem α do poziomu, jeżeli współczynnik oporu powietrza wynosi $k = 0.1$.

Wskazówka: równanie ruchu ma postać:

$$m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m\,\mathbf{g} - k\,\frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

gdzie m-masa, k-wsp. oporu pow., **g**- przysp. ziemskie.

Zadanie 5.

Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego:

$$r'' + \phi\, r' + r = \sin\phi$$

z warunkami początkowymi:

$$r(0) = 1, \quad r'(0) = \alpha$$

przedstawia dla $\phi = [0, 2\pi]$ pewną krzywą na płaszczyźnie zespolonej określoną wzorem $z = re^{i\phi}$.

Należy znaleźć:
a) wartość parametru α dla której krzywa jest zamknięta
b) obliczyć pole otrzymanej w ten sposób figury geometrycznej

Zadanie 6.

Elementy M_{nm} macierzy $\mathcal{M}$ o rozmiarze $N \times N$ dla N=2,3 i 4 są równe ***ilości*** *rozwiazań* **rzeczywistych** równania:

$$x^n = \exp x^m$$

dla $n, m = 0, 1, \ldots, N-1$. Należy obliczyć dla trzech zdefiniowanych wyżej macierzy:

1. wyznacznik i ślad macierzy $\mathcal{M}$
2. sumę wszystkich elementów macierzy $\mathcal{M}$
3. sumę *kwadratów* elementów macierzy $\mathcal{M}$
4. rzeczywiste wartości własne
5. $Det(e^{\mathcal{M}})$