ZADANIE 1.

Niech rzeczywista kwadratowa macierz $\mathcal{O}$ o wymiarze 3×3 dana jest wyrażeniem:

$$\mathcal{O} = e^{\alpha \mathcal{A}}$$

gdzie $\alpha > 0$ i składowe macierzy $\mathcal{A}$ są równe $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} n^k,$$

wektor $\mathbf{n}$ ma składowe n^k równe:

$$\begin{aligned} n^1 &= \cos\phi \sin\vartheta \\ n^2 &= \sin\phi \sin\vartheta \\ n^3 &= \cos\vartheta, \end{aligned}$$

natomiast ϵ_{ijk} to 3-wymiarowy symbol Levi-Civity o składowych $(i, j, k = 1, 2, 3)$:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i = j, i = k \text{ lub } j = k \\ +1 & \text{dla} \quad (i, j, k) = (1, 2, 3),\ (2, 3, 1) \text{ lub } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{dla} \quad (i, j, k) = (1, 3, 2),\ (3, 2, 1) \text{ lub } (2, 1, 3) \end{cases}$$

Należy podać składowe macierzy $\mathcal{O}$ w następujacych przypadkach:

1. $\alpha = 0$
2. $\vartheta = 0$
3. $\vartheta = \pi/2,\ \phi = 0$
4. $\vartheta = \pi/2,\ \phi = \pi/2$

a ponadto obliczyć w przypadku ogólnym (dla dowolnych rzeczywistych wartości α, ϑ i ϕ) wyznacznik, ślad, wielomian charakterystyczny oraz wartości własne.

ZADANIE 2.

a) Rozwiąż równanie:

$$\mathcal{X}^2 = \mathcal{A}$$

gdzie:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b*) Rozwiąż równanie:

$$\mathcal{X}^2 = \mathcal{I}$$

gdzie macierz jednostkowa 2×2:

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ZADANIE 3.

Macierz kwadratowa $\mathcal{B}$ $N \times N$, gdzie $N \gg 100$ została wypełniona liczbami losowymi z przedziału $\{0, 1\}$. Dla macierzy:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{B}^T$$

podaj największą wartość własną λ_{max} w zależności od N. Oszacuj prawdpodobieństwo występowania pozostałych wartości własnych.