Zadanie 1.

Rozwiąż (numerycznie) w prostokącie $\{-1, 1\} \times \{0, t_{MAX}\}$ równanie falowe:

$$\rho(x)\partial_{tt}u(t, x) = \partial_{xx}u(t, x)$$

na skończonym odcinku $x = \{-1, 1\}$, z warunkami brzegowymi:

$$\begin{cases} a_{11}\,u(t, -1) + a_{12}\,\partial_x u(t, -1) &= 0 \\ a_{21}\,u(t, 1) + a_{22}\,\partial_x u(t, 1) &= 0 \end{cases}$$

oraz początkowymi:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \quad -1 < x < 1$$

Rozważ w szczególności nastepujące przypadki:

a) $a_{11} = a_{21} = 1, a_{12} = a_{22} = 0, u_0 = \sin \pi x, u_1 = 0, \rho(x) = 1$

b) $a_{11} = a_{21} = 0, a_{12} = a_{22} = 1, u_0 = f(x), u_1 = f'(x), \rho(x) = 1$

c) $u(t, -1) = u(t, 1), \partial_x u(t, -1) = \partial_x u(t, 1)$ (periodyczne warunki brzegowe) oraz $u_0 = f(x), u_1 = f'(x), \rho(x) = 1$

d) $\rho \neq const$

Zadanie zostanie pokazane na wykładzie, ale bez przeliczania: brak mocy obliczeniowej i czasu

Zadanie 2.

Mathematica rozwiązując r.r. cząstkowe zapisuje wynik w postaci funkcji interpolującej (**InterpolatingFunction**), co skutkuje ogromnym zużyciem pamięci. W efekcie rachunek, który mógłby być z powodzeniem wykonany w czasie powiedzmy godzin, nie jest możliwy gdyż i tak nie zmieści się w pamięci. Napisz funkcję która dzieli ewolucję czasową na mniejsze odcinki czasu, tak aby każdy z rachunków bez problemu mieścił się w pamięci. Docelowym wynikiem powinna być f. interpolująca, która zawiera zredukowaną ilość kroków czasowych.

Zadanie 3.

Dla równania Burgersa:

$$\partial_t u(t, x) + u(t, x)\,\partial_x u(t, x) = \epsilon\,\partial_{xx}u(t, x)$$

znane jest rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego; wzór można znaleźć np. w Wikipedii lub MathWorld lub wyprowadzić za pomocą transformacji Cole-Hopfa:

$$u(t, x) = -2\epsilon\partial_x \ln \phi(t, x).$$

Napisz funkcję która generuje rozwiązanie zagadnienia początkowego $u(t, x)$. Podejmij też próbę wygenerowania rozwiązań symbolicznych. Porównaj z rozw. numerycznymi.

Zadanie 4.

Jednorodny sześcian o boku 1 i temperaturze 0 został wrzucony do „wody” o temperaturze $T = 1$. Po jakim czasie temperatura w geometrycznym środku sześcianu osiągnie 1/2 stopnia? Przyjąć, że rozkład temperatury opisany jest równaniem:

$$\partial_t T = \Delta T$$

Zadanie 5*.

Jak w Zad. 4, ale dla kuli i czworościanu foremnego o objętości 1.